Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

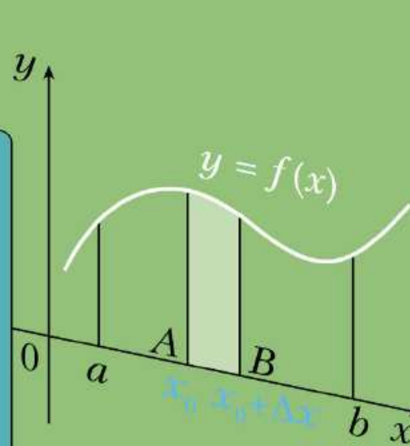
А.Г. Мерзляк
Д.А. Номировский
В.Б. Полонский
М.С. Якир

11 класс

Алгебра и начала математического анализа

вентана граф

Базовый уровень



российский учебник

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

Математика:
алгебра и начала математического анализа, геометрия

Алгебра и начала математического анализа

11 класс

Базовый уровень

Учебное пособие

под редакцией В. Е. Подольского

2-е издание, пересмотренное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

Дорогие одиннадцатиклассники!

В этом учебном году вы оканчиваете школу, и мы уверены, что полученные знания станут для вас надёжной основой в освоении будущей профессии. Также надеемся, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках. Ознакомьтесь с его структурой.

Текст учебника разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным** шрифтом, и на слова, набранные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно из рубрики «Задачи высокой сложности»).

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки» или к рубрике «Для тех, кто хочет знать больше». Материал, изложенный в них, непрост. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успехов!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✵ Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

◄ Окончание доказательства теоремы, решения задачи

8.6 Задания, рекомендованные для домашней работы

5.2 Задания, рекомендованные для устной работы

Глава 1. Показательная и логарифмическая функции

В этой главе вы ознакомитесь с понятием степени с произвольным действительным показателем. Вы узнаете, какие функции называют показательной и логарифмической, изучите свойства этих функций, научитесь решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

§ 1. Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция

В 10 классе вы ознакомились с понятием степени a^x положительного числа a с рациональным показателем x. Теперь мы выясним, что представляет собой степень положительного числа с действительным показателем x.

Строгое определение степени с действительным показателем и доказательство её свойств выходит за пределы рассматриваемого курса. Текст этого параграфа содержит лишь общие пояснения того, как можно провести необходимые обоснования.

Начнём с частного случая. Выясним, что понимают под степенью числа 2 с показателем x, где x – некоторое действительное число.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2^x$, где x – рациональное число, то есть областью определения функции f является множество $\boldsymbol{Q}$.

На рисунке 1.1 отмечены точки графика функции f, соответствующие некоторым целым значениям x. Вычислим значения функции $f(x) = 2^x$ при некоторых дробных значениях x. Например, при $x = \frac{1}{2}$ имеем:

Рис. 1.1

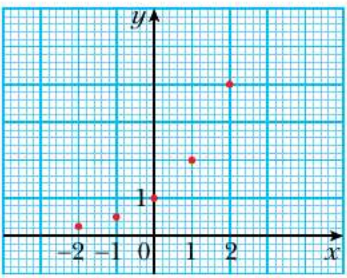
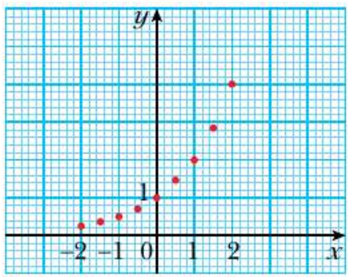


Рис. 1.2



$2^x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}41...$. Если к точкам, изображённым на рисунке 1.1, добавить точки графика функции f, соответствующие, например, значениям $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$, то получим множество точек, изображённое на рисунке 1.2.

Более точное представление о графике функции f можно получить, если отметить точки, соответствующие другим рациональным значениям аргумента (рис. 1.3).

Рис. 1.3

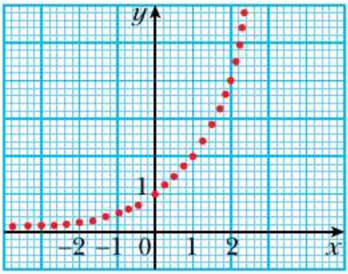
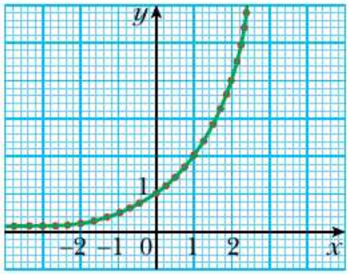


Рис. 1.4



Оказывается, существует только одна непрерывная на $\boldsymbol{R}$ функция g, график которой проходит через все точки графика функции f. График функции g изображён на рисунке 1.4. Множество точек графика функции f является подмножеством множества точек графика функции g. Значение функции g в точке x называют **степенью** числа 2 **с действительным показателем** x и обозначают 2^x. Таким образом, $g(x) = 2^x$, где x – произвольное действительное число.

Аналогично определяют степень положительного числа a с действительным показателем x. Если для числа $a > 0$ рассмотреть функцию $f(x) = a^x$, определённую для всех рациональных значений x, то существует единственная непрерывная на $\boldsymbol{R}$ функция g, график которой проходит через все точки графика функции f. Значение функции g в точке x называют **степенью положительного числа** a **с действительным показателем** x и обозначают a^x.

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то функцию $g(x) = a^x$ называют **показательной функцией**.

Если основание a равно нулю, то степень a^x определяют только для $x > 0$ и считают, что $0^x = 0$. Например, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^{\pi} = 0$, а выражение $0^{-\sqrt{3}}$ не имеет смысла.

При $a < 0$ выражение a^x, где x – иррациональное число, не имеет смысла.

Свойства степени с рациональным показателем сохраняются и для степени с действительным показателем.

В частности, для $a > 0$, $b > 0$ и любых действительных x и y справедливы такие равенства:

1) $\boldsymbol{a^x a^y = a^{x+y}}$;

2) $\boldsymbol{a^x : a^y = a^{x-y}}$;

3) $\boldsymbol{(a^x)^y = a^{xy}}$;

4) $\boldsymbol{(ab)^x = a^x b^x}$;

5) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}}$.

Если $a = b$, то из свойства 5 следует, что $1^x = 1$.

Пример 1. Упростите выражение $\dfrac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}} = \frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1)a^{\sqrt{7}}}{\left(a^{3\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1} = 1.$$ ◄

Изучим некоторые свойства показательной функции.

Рассмотрим показательную функцию $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Областью определения показательной функции является множество действительных чисел, т. е. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

При $a > 0$ и любом x выполняется неравенство $a^x > 0$. Поэтому область значений показательной функции состоит только из положительных чисел.

Можно показать, что для данного числа a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, и для любого положительного числа b существует такое число x, что выполняется равенство $a^x = b$.

Сказанное означает, что *областью значений показательной функции является множество* $(0; +\infty)$, т. е. $E(f) = (0; +\infty)$.

Показательная функция не имеет нулей, и промежуток $(-\infty; +\infty)$ *является её промежутком знакопостоянства.*

Показательная функция непрерывна.

При $a > 1$ *показательная функция является возрастающей; при* $0 < a < 1$ *показательная функция является убывающей.*

Поскольку показательная функция является либо возрастающей (при $a > 1$), либо убывающей (при $0 < a < 1$), то она *не имеет точек экстремума.*

Показательная функция является дифференцируемой. Подробнее о производной показательной функции вы узнаете в § 8.

На рисунках 1.5 и 1.6 схематически изображён график показательной функции для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$ соответственно.

Рис. 1.5

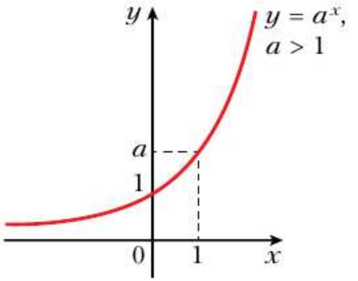
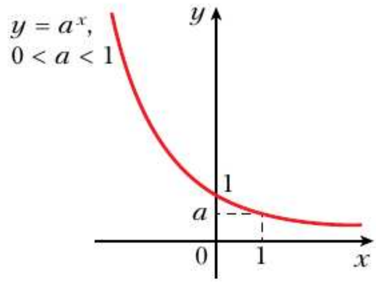


Рис. 1.6



В частности, на рисунках 1.7 и 1.8 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Рис. 1.7

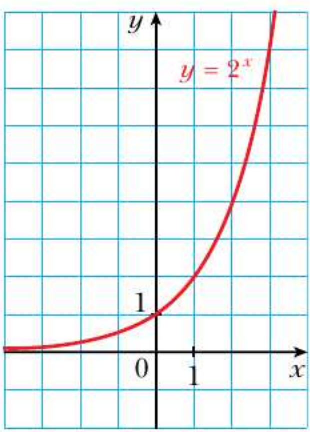
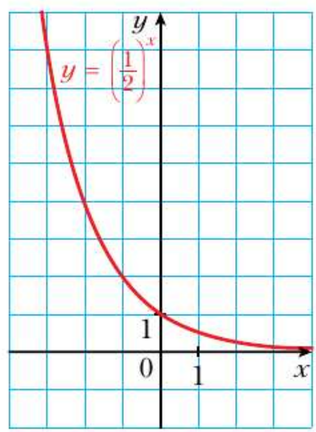


Рис. 1.8



Заметим, что при $a > 1$ график показательной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогично при $0 < a < 1$ график показательной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Показательная функция является математической моделью целого ряда процессов, происходящих в природе или связанных с деятельностью человека.

Например, биологам известно, что колония бактерий в определённых условиях за равные промежутки времени увеличивает свою массу в одно и то же количество раз.

Это означает, что если, например, в момент времени $t = 0$ масса была равной 1, а в момент времени $t = 1$ масса была равной a, то в моменты времени $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = n$, ... масса будет равной соответственно a^2, a^3, ..., a^n, ... Поэтому естественно считать, что в любой момент времени t масса будет равной a^t. Можно проверить (сделайте это самостоятельно), что значения функции $f(t) = a^t$ увеличиваются в одно и то же количество раз за равные промежутки времени.

Таким образом, рассмотренный процесс можно описывать с помощью показательной функции $f(t) = a^t$.

Из курса физики известно, что при радиоактивном распаде масса радиоактивного вещества за равные промежутки времени уменьшается в одно и то же количество раз.

Если поместить деньги в банк под определённый процент, то каждый год количество денег на счёте будет увеличиваться в одно и то же количество раз.

Поэтому показательная функция описывает и эти процессы.

В таблице приведены свойства функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, изученные в этом параграфе.

Область определения	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$(0; +\infty)$
Нули функции	—
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на $\boldsymbol{R}$
Возрастание/убывание	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая
Непрерывность	Непрерывная

Дифференцируемость	Дифференцируемая
Асимптоты	Если $a > 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; если $0 < a < 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

Пример 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 3^x$ на промежутке $[-4; 3]$.

Решение. Поскольку функция f возрастает на промежутке $[-4; 3]$, то наименьшее значение она принимает при $x = -4$, а наибольшее — при $x = 3$. Следовательно,

$$\min_{[-4;\,3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

$$\max_{[-4;\,3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Ответ: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

1. Какими свойствами обладает степень с действительным показателем?

2. Сформулируйте свойства показательной функции.

Упражнения

1.1. Вычислите значение выражения:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;

2) $\left((3\sqrt[3]{7})^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;

4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.2. Найдите значение выражения:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$;

2) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$;

3) $\left((\sqrt[5]{10})^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.3. Докажите, что:

1) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}$;

2) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} = \left(16^{\sqrt{3}}\right)^{-2}$;

3) $\frac{12^{\sqrt{48}} \cdot 2^{4\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{108}} \cdot 6^{\sqrt{27}}} = 6^{\sqrt{3}}$.

1.4. Какая из данных функций является показательной:

1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

1.5. На основании какого свойства показательной функции можно утверждать, что:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.6. Укажите, какие из данных функций являются возрастающими, а какие – убывающими:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.7. Постройте график функции $y = 3^x$. В каких пределах изменяется значение функции, если x возрастает от -1 до 3 включительно?

1.8. Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. В каких пределах изменяется значение функции, если x возрастает от -2 до 2 включительно?

1.9. Сравните с числом 1 степень:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 3) $0,6^{2\sqrt{5}}$; 5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$;

2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$; 6) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

1.10. Какие из данных чисел больше 1, а какие меньше 1:

1) $1,8^{\sqrt{1,8}}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$; 3) $7^{-\sqrt{2}}$; 4) $0,3^{-\pi}$?

1.11. Сравните:

1) $5^{3,4}$ и $5^{3,26}$; 4) $0,17^{-3}$ и 1;

2) $0,3^{0,4}$ и $0,3^{0,3}$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ и $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;

3) 1 и $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

1.12. Сравните с числом 1 значение выражения:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$;

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

1.13. Сравните с числом 1 положительное число a, если:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$;
3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$;
2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$;
4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.14. Сравните числа m и n, если:

1) $0,8^m < 0,8^n$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
2) $3,2^m > 3,2^n$;
4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.15. Упростите выражение:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$;

2) $\dfrac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$;

3) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$;

4) $\dfrac{a^{\sqrt[3]{24}}-1}{a^{\sqrt[3]{3}}-1}-\dfrac{a^{\sqrt[3]{81}}+1}{a^{\sqrt[3]{3}}+1}$.

1.16. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(a^{2\sqrt{6}}-1)(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}})}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}$;

2) $\left((a^{\pi}+b^{\pi})^2-(a^{\pi}-b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

1.17. Верно ли утверждение:

1) наибольшее значение функции $y = 0,2^x$ на промежутке $[-1; 2]$ равно 5;
2) областью определения функции $y = 4 - 7^x$ является множество действительных чисел;
3) областью значений функции $y = 6^x + 5$ является промежуток $[5; +\infty)$;
4) наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на промежутке $[-2; 2]$ равно 16?

1.18. Найдите область значений функции:

1) $y = -9^x$;
3) $y = 7^x - 4$;
2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$;
4) $y = 6^{|x|}$.

1.19. Найдите наибольшее значение функции $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на промежутке $[-2; 3]$.

1.20. На каком промежутке наибольшее значение функции $y = 2^x$ равно 16, а наименьшее равно $\frac{1}{4}$?

1.21. На каком промежутке наибольшее значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ равно 27, а наименьшее равно $\frac{1}{9}$?

1.22. Решите неравенство:

1) $2^x > -1$;   2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.23. Решите неравенство $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.24. Постройте график функции:

1) $y = 2^x - 1$;   4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$;

2) $y = 2^{x-1}$;   5) $y = -2^x$;

3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$;   6) $y = 5 - 2^x$.

1.25. Постройте график функции:

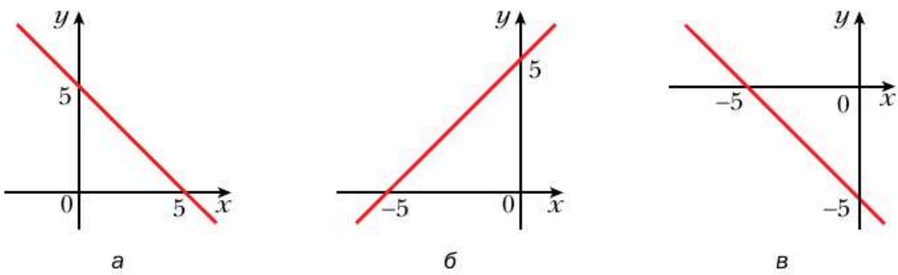
1) $y = 3^x + 1$;   4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$;

2) $y = 3^{x+1}$;   5) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$;   6) $y = -3^x - 1$.

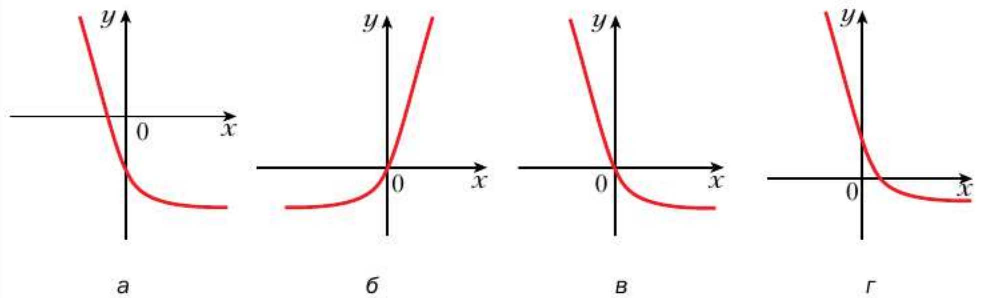
1.26. График какой из функций, изображённых на рисунке 1.9, пересекает график функции $y = 5^x$ более чем в одной точке?

Рис. 1.9



1.27. На рисунке 1.10 укажите график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$.

Рис. 1.10



1.28. Сравните $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}$ и $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$.

1.29. Определите графически количество корней уравнения:

1) $2^x = x$;
2) $2^x = x^2$;
3) $2^x = \sin x$;
4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.30. Определите графически количество корней уравнения:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$;
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.31. Постройте график функции:

1) $y = 2^{|x|}$;
2) $y = 2^{|x|} + 1$;
3) $y = |2^x - 1|$;
4) $y = \left|\frac{1}{2^x} - 1\right|$.

1.32. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3^{|x|}}$;
2) $y = 3^{|x|} - 1$;
3) $y = |3^x - 1|$.

1.33. Постройте график функции $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.34. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$;
2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

1.35. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 6^{\cos x}$;
2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|} + 5$.

Готовимся к изучению новой темы

1.36. Представьте числа 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ в виде степени с основанием: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

1.37. Представьте числа 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ в виде степени с основанием: 1) 9; 2) $\frac{1}{9}$.

1.38. Упростите выражение:

1) $7^{x+1} + 7^x$;
2) $10^{x-2} - 10^x$;
3) $2^{x+1} + 2^{x-4}$;
4) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1}$;
5) $2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+1}$;
6) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x} + 36^{\frac{x}{2}} - 6^{x+1}$;
7) $9^{x+1} + 3^{2x+1}$;
8) $\sqrt{25^{x-2}} - 2 \cdot 5^x + \left(\sqrt{5}\right)^{2x+4}$.

§ 2. Показательные уравнения

Рассмотрим уравнения $2^x = 8,$

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$
$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

Во всех этих уравнениях переменная содержится только в показателе степени. Данные уравнения – примеры **показательных уравнений**.

При решении многих показательных уравнений используют следующую теорему.

Теорема 2.1

При $a > 0$ и $a \neq 1$ равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Доказательство

Очевидно, что если $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Докажем, что из равенства $a^{x_1} = a^{x_2}$ следует равенство $x_1 = x_2$. Предположим, что $x_1 \neq x_2$, то есть $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$. Пусть, например, $x_1 < x_2$.

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$. Она является либо возрастающей, либо убывающей. Тогда из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) или $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Однако по условию выполняется равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$. Получили противоречие.

Аналогично получают противоречие для случая, когда $x_1 > x_2$. Таким образом, $x_1 = x_2$. ◂

Следствие

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Доказательство

Пусть x_1 – корень уравнения (1), то есть $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тогда по теореме 2.1 получаем, что $f(x_1) = g(x_1)$. Следовательно, x_1 – корень уравнения (2).

Пусть x_2 – корень уравнения (2), то есть $f(x_2) = g(x_2)$. Отсюда $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Мы показали, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), и наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1). Следовательно, уравнения (1) и (2) равносильны. ◂

Рассмотрим примеры решения показательных уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $(0{,}125)^x = 128$.

Решение. Представим каждую из частей уравнения в виде степени с основанием 2. Имеем: $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ и $128 = 2^7$. Запишем:

$$(2^{-3})^x = 2^7; \qquad 2^{-3x} = 2^7.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$-3x = 7.$$

Отсюда $x = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $-\frac{7}{3}$. ◂

Пример 2. Решите уравнение $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot (10^{x-1})^3$.

Решение. Воспользовавшись свойствами степени, представим левую и правую части уравнения в виде степени с основанием 10. Имеем:

$$(2 \cdot 5)^{x^2-3} = 10^{-2} \cdot 10^{3x-3}; \qquad 10^{x^2-3} = 10^{3x-5}.$$

Переходим к равносильному уравнению:

$$x^2 - 3 = 3x - 5.$$

Отсюда $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Ответ: 1; 2. ◂

Пример 3. Решите уравнение $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$.

Решение. Имеем: $2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} = 1280$.

В левой части полученного уравнения вынесем за скобки степень с наименьшим показателем. Получаем:

$$2^{12x-4}(2^3 - 2^2 + 2^1 - 1) = 1280; \qquad 2^{12x-4} \cdot 5 = 1280;$$

$$2^{12x-4} = 256; \qquad 2^{12x-4} = 2^8; \qquad 12x - 4 = 8; \qquad x = 1.$$

Ответ: 1. ◂

Пример 4. Решите уравнение $2 \cdot 3^{x+2} - 3^{x+1} = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x$.

Решение. Имеем: $3^x(2 \cdot 3^2 - 3) = 5^x(5 + 4)$; $\qquad 3^x \cdot 15 = 5^x \cdot 9$;

$$\frac{3^x}{5^x} = \frac{9}{15}; \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5}; \qquad x = 1.$$

Ответ: 1. ◂

Пример 5. Решите уравнение $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Решение. Поскольку $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, то данное уравнение удобно решать методом замены переменной.

Пусть $5^x = t$. Тогда данное уравнение можно переписать так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Отсюда $t = 1$ или $t = -5$.

Если $t = 1$, то $5^x = 1$. Отсюда $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Если $t = -5$, то $5^x = -5$. Поскольку $5^x > 0$ при любом x, то уравнение $5^x = -5$ не имеет корней.

Ответ: 0. ◂

Пример 6. Решите уравнение $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Решение. Имеем: $4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0$.

Поскольку $3^{2x} \neq 0$ при любом x, то, разделив обе части уравнения на 3^{2x}, получим уравнение, равносильное данному:

$$4 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0. \text{ Отсюда } 4 \cdot \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Тогда можно записать:

$$4t^2 - t - 18 = 0.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$ Имеем: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$

Поскольку $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ при любом x, то первое уравнение совокупности решений не имеет. Второе уравнение совокупности перепишем так:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Отсюда $x = -2$.

Ответ: -2. ◄

Какую теорему и какое следствие из неё используют при решении показательных уравнений?

Упражнения

2.1. Решите уравнение:

1) $4^x = 64$;
2) $3^x = \frac{1}{81}$;
3) $0{,}6^{2x-3} = 1$;
4) $10^{-x} = 0{,}001$;
5) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$;
6) $8^x = 16$;
7) $0{,}16^x = \frac{5}{2}$;
8) $\sqrt{5^x} = 25$;
9) $0{,}25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$;
10) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$;
11) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$;
12) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$;
13) $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;
14) $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$;
15) $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$.

2.2. Решите уравнение:

1) $0{,}4^{x^2-x-6} = 1$;
2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$;
3) $0{,}7^x = 2\frac{2}{49}$;
4) $9^{-x} = 27$;
5) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$;
6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$;
7) $100^x = 0{,}01\sqrt{10}$;
8) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$;
9) $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$;
10) $32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$;
11) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$;
12) $16^{5-3x} = 0{,}125^{5x-6}$.

2.3. Решите уравнение:

1) $3^{x+2} + 3^x = 30$;
2) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$;
3) $2^{x+4} - 2^x = 120$;
4) $7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77$;
5) $5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160$;
6) $6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192$.

2.4. Решите уравнение:

1) $5^{x+1} + 5^x = 150$;
2) $2^x + 2^{x-3} = 18$;
3) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$;
4) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$.

2.5. Решите уравнение:

1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;
2) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;
3) $25^x - 5^x - 20 = 0$;
4) $100 \cdot 0{,}3^{2x} + 91 \cdot 0{,}3^x - 9 = 0$.

2.6. Решите уравнение:

1) $6^{2x} - 3 \cdot 6^x - 18 = 0$;
2) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

2.7. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$;
2) $4^x \cdot 3^{x+1} = 0{,}25 \cdot 12^{3x-1}$;
3) $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$;
4) $0{,}25 \cdot 2^{x^2} = \sqrt[3]{0{,}25 \cdot 4^{2x}}$;
5) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$;
6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \frac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

2.8. Решите уравнение:

1) $\frac{\sqrt{32}}{16^{x^2}} = 8^{3x}$;
2) $9 \cdot 3^{\sin x} = \sqrt{27}$;
3) $2^{x-1} = 12^{2x} \cdot 3^{-2x} \cdot 2^{x+1}$;
4) $\sqrt[5]{7^{x+1}} = \frac{49}{\sqrt{7}}$.

2.9. Решите уравнение:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$;
2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10$;
3) $2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354$;
4) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$;
5) $4 \cdot 9^{1{,}5x-1} - 27^{x-1} = 33$;
6) $0{,}5^{5-2x} + 3 \cdot 0{,}25^{3-x} = 5$;
7) $2^{2x+1} + 4^x - \left(\frac{1}{16}\right)^{1-0{,}5x} = 47$;
8) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}$.

2.10. Решите уравнение:

1) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$;
2) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$;
3) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9$;
4) $2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} = 36$;

5) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246;$

6) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}.$

2.11. Решите уравнение:

1) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0;$

2) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10;$

3) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3;$

4) $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3;$

5) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28;$

6) $\frac{9}{2^x - 1} - \frac{21}{2^x + 1} = 2.$

2.12. Решите уравнение:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0;$

2) $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0;$

3) $5^x - 0{,}2^{x-1} = 4;$

4) $4^{x+0,5} + 7 \cdot 2^x = 4;$

5) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2;$

6) $\frac{5}{3^x - 6} + \frac{5}{3^x + 6} = 2.$

2.13. Решите уравнение:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2};$

2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1};$

3) $7^x - 5^{x+2} = 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}.$

2.14. Решите уравнение:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2};$

2) $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2};$

3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}.$

2.15. Решите уравнение:

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2 \cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0;$

2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0;$

3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1;$

4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6;$

5) $5 \cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3;$

6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3;$

7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0.$

2.16. Решите уравнение:

1) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2x+3}{x}} - 32 = 0;$

2) $5^{\sqrt{x-2}} - 5^{1-\sqrt{x-2}} - 4 = 0;$

3) $2^{\cos 2x} - 3 \cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0.$

2.17. Решите уравнение:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0;$

2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0;$

3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x;$

4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x.$

2.18. Решите уравнение:

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0;$

2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}.$

2.19. Решите уравнение $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}.$

2.20. Решите уравнение $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}.$

Готовимся к изучению новой темы

2.21. Какие из следующих неравенств верны:

1) $0{,}2^4 > 0{,}2^5$; 2) $0{,}2^4 > 0{,}2^3$; 3) $4^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{2}{3}}$?

2.22. Решите неравенство: 1) $2^x > -1$; 2) $3^x < -5$; 3) $5^{\frac{1}{x}} > -3$.

§ 3. Показательные неравенства

Неравенства $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$, содержащие переменную только в показателе степени, являются примерами **показательных неравенств**.

При решении многих показательных неравенств используют следующую теорему.

Теорема 3.1

При $a > 1$ неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 < x_2$.

Справедливость этой теоремы следует из того, что при $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей.

Следствие

Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$; если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 2.1, докажите это следствие самостоятельно.

Рассмотрим примеры решения показательных неравенств.

Пример 1. Решите неравенство $8 \cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$.

Решение. Имеем: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Поскольку основание степеней 2^{3x+2} и 2^1 больше единицы, то последнее неравенство равносильно такому:

$$3x + 2 < 1.$$

Отсюда $3x < -1$; $\quad x < -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◄

<u>Пример 2.</u> Решите неравенство $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$.

Решение. Имеем: $\left(\frac{4}{49}\right)^{x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$; $\quad \left(\frac{4}{49} \cdot \frac{147}{20}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geqslant \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{4}\right)^{x}$; $\quad \left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{4x}$.

Поскольку $0 < \frac{3}{5} < 1$, то последнее неравенство равносильно такому: $x \leqslant 4x$. Отсюда $x \geqslant 0$.

Ответ: $[0; +\infty)$. ◄

<u>Пример 3.</u> Решите неравенство $4^{x} - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$.

Решение. Перепишем данное неравенство так:

$$2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52.$$

Отсюда $2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52$; $\quad 2^{2x-4} \cdot 13 > 52$; $\quad 2^{2x-4} > 4$; $2^{2x-4} > 2^2$; $\quad 2x - 4 > 2$; $\quad x > 3$.

Ответ: $(3; +\infty)$. ◄

<u>Пример 4.</u> Решите неравенство $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

Решение. Имеем: $(2^2)^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$; $\quad 2^{-2x+1} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$; $2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

Пусть $2^{-x} = t$. Тогда последнее неравенство приобретает вид

$$2t^2 - 7t - 4 < 0.$$

Решив это неравенство, получим $-\frac{1}{2} < t < 4$. Отсюда $-\frac{1}{2} < 2^{-x} < 4$.

Поскольку $2^{-x} > 0$, то $2^{-x} > -\frac{1}{2}$ при всех x. Поэтому достаточно решить неравенство $2^{-x} < 4$.

Имеем: $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Ответ: $(-2; +\infty)$. ◄

<u>Пример 5.</u> Решите неравенство $4^{x} - 2 \cdot 5^{2x} + 10^{x} > 0$.

Решение. Перепишем данное неравенство так: $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} + 2^{x} \cdot 5^{x} > 0$. Поскольку $5^{2x} > 0$ при любом x, то, разделив обе части последнего неравенства на 5^{2x}, получаем неравенство, равносильное данному:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^{x} > 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} = t$. Тогда последнее неравенство приобретает вид $t^2 + t - 2 > 0$. Решив это неравенство, получаем $\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2. \end{array}\right.$ Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^{x} > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^{x} < -2. \end{array}\right.$$

Из неравенства $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} > 1$ находим, что $x < 0$. Неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} < -2$ не имеет решений.

Ответ: $(-\infty; 0)$. ◄

Какую теорему и какое следствие из неё используют при решении показательных неравенств?

Упражнения

3.1. Равносильны ли неравенства:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ и $2x + 4 > x - 1$;
2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ и $x^2 - 4 < x + 2$;
3) $a^x > a^5$, где $a > 1$ и $x > 5$;
4) $a^x < a^{-3}$, где $0 < a < 1$ и $x < -3$?

3.2. Решите неравенство:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > \frac{1}{4}$;
2) $5^x < \frac{1}{5}$;
3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;
5) $2^{x^2-1} < 8$;
6) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
7) $0{,}3^{4x-8} > 1$;
8) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;
9) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$.

3.3. Решите неравенство:

1) $6^{7x-1} > 6$;
2) $10^x < 0{,}001$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$;
4) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;
5) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^{x}$;
6) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

3.4. Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $0{,}2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$;
2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$;
3) $2 < 0{,}5^{x-1} \leqslant 32$?

3.5. Найдите сумму целых решений неравенства:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$; 2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

3.6. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}$; 2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}$.

3.7. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16}$; 2) $f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}$.

3.8. Решите неравенство:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x - x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;

2) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;

3) $0{,}6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1$;

4) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5} > \sqrt{2}$;

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} \leqslant \frac{9}{4}$;

6) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$.

3.9. Решите неравенство:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2 - x} < \frac{9}{49}$;

2) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

3) $0{,}3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1$;

4) $\left(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0{,}5}$.

3.10. Решите неравенство:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$;

2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$;

3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;

5) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$.

3.11. Решите неравенство:

1) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x < 45$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 3$;

3) $5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}$.

3.12. Решите неравенство:

1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0$;

2) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$;

3) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \leqslant 0$;

4) $0{,}25^x - 12 \cdot 0{,}5^x + 32 \geqslant 0$;

5) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;

6) $25^x + 5^x - 30 \geqslant 0$.

3.13. Решите неравенство:

1) $9^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 7 \leqslant 0$;

2) $2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geqslant 0$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0$;

4) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 \leqslant 0$.

3.14. Решите неравенство:

1) $\dfrac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0$;

2) $\dfrac{2^x - 1}{x - 1} > 0$.

3.15. Решите неравенство:

1) $\dfrac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geqslant 0$;

2) $\dfrac{5^x - 0{,}04}{5 - x} \geqslant 0$.

3.16. Решите неравенство:

1) $2^{3x+1} + 0{,}25^{\frac{1-3x}{2}} - 4^{\frac{3x}{2}} > 192$;

2) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

3.17. Решите неравенство:

1) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$;

2) $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 4^{2x-2} \leqslant 120$.

3.18. Найдите множество решений неравенства:

1) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} - 8 > 0$;

2) $2^{x+3} + 2^{1-x} < 17$;

3) $6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geqslant 0$;

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leqslant \frac{6}{5}$.

3.19. Найдите множество решений неравенства:

1) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{1-x} > 7$;

2) $4^{1-x} - 0{,}5^{1-2x} \geqslant 1$.

3.20. Решите неравенство $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leqslant 1$.

3.21. Решите неравенство $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

3.22. Решите неравенство:

1) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0$;

2) $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geqslant 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

3.23. Решите неравенство:

1) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0$;

2) $2 \cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9 \cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$.

Упражнения для повторения

3.24. Упростите выражение

$$\left(\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}\right) : (3a^2 + 3b\sqrt{ab}) + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}}.$$

3.25. Решите уравнение $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$.

3.26. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{7 - x}{\sqrt{4x^2 - 19x + 12}}}$.

3.27. Найдите область значений функции $y = \sqrt{4x - x^2}$.

§ 4. Логарифм и его свойства

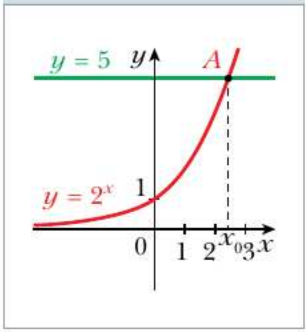
Легко решить уравнения $2^x = 4$ и $2^x = 8$. Их корнями будут соответственно числа 2 и 3.

Однако сложно сразу указать корень уравнения $2^x = 5$. Возникает естественный вопрос: есть ли вообще корни у этого уравнения?

Обратимся к графической интерпретации. На рисунке 4.1 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 5$. Они пересекаются в некоторой точке A $(x_0; 5)$. Следовательно, уравнение $2^x = 5$ имеет единственный корень x_0.

Однако графический метод не позволяет определить точное значение x_0.

Рис. 4.1



С подобной ситуацией мы встречались, решая в 10 классе уравнение $x^3 = 5$. Сразу указать его корень тоже сложно, а графическая интерпретация показывает, что это уравнение имеет единственный корень (рис. 4.2). Потребность называть и записывать этот корень в своё время привела к новому понятию «кубический корень» и обозначению $\sqrt[3]{5}$.

Корень уравнения $2^x = 5$ договорились называть **логарифмом числа** 5 **по основанию** 2 и обозначать $\log_2 5$. Таким образом, число $\log_2 5$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 2, чтобы получить число 5. Можно записать:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Рис. 4.2

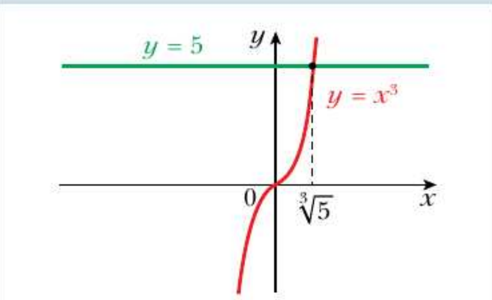
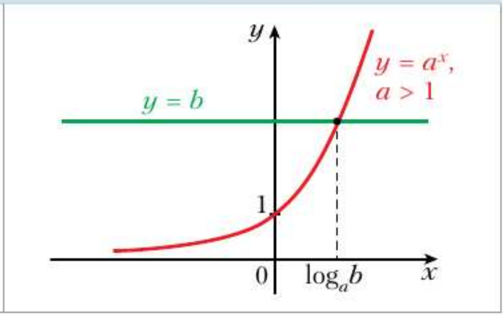


Рис. 4.3



Рассмотрим уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Поскольку для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $a^x > 0$, то при $b \leqslant 0$ это уравнение не имеет решений. Если $b > 0$, то это уравнение имеет единственный корень (рис. 4.3). Его называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$.

Определение

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Например, $\log_3 9$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 3, чтобы получить число 9. Имеем: $\log_3 9 = 2$, так как $3^2 = 9$.

Ещё несколько примеров:

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ так как } 2^{-3} = \frac{1}{8};$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}, \text{ так как } 25^{\frac{1}{2}} = 5;$$

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ так как } 17^1 = 17;$$

$$\log_{100} 1 = 0, \text{ так как } 100^0 = 1.$$

Из определения логарифма следует, что при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$$

Его называют **основным логарифмическим тождеством**.

Например, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Также из определения логарифма следует, что при $a > 0$ и $a \neq 1$

$$\boldsymbol{\log_a 1 = 0}$$

$$\boldsymbol{\log_a a = 1}$$

Рассмотрим равенство $a^c = b$.

Вы знаете, что действие нахождения числа b по данным числам a и c называют возведением числа a в степень c.

Действие нахождения числа c по данным числам a и b, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, называют **логарифмированием числа b по основанию a**. Действительно, $c = \log_a b$.

Отметим, что при $a > 0$ левая часть равенства $a^c = b$ положительна. Следовательно, $b > 0$.

Поэтому при $b \leqslant 0$ выражение $\log_a b$ не имеет смысла.

Логарифм по основанию 10 называют **десятичным логарифмом**. Вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$.

Используя это обозначение и основное логарифмическое тождество, для каждого $b > 0$ можно записать: $10^{\lg b} = b$.

Рассмотрим основные свойства логарифмов.

Теорема 4.1
(логарифм произведения)

Если $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то выполняется равенство

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Коротко формулируют: *логарифм произведения равен сумме логарифмов.*

Доказательство

Рассмотрим выражения: $a^{\log_a xy}$ и $a^{\log_a x + \log_a y}$. Докажем, что они равны.

Используя основное логарифмическое тождество и свойства степени, запишем:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Следовательно, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Отсюда по теореме 2.1 получаем, что $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◄

Теорема 4.2
(логарифм частного)

Если $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то выполняется равенство

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Коротко формулируют: *логарифм частного равен разности логарифмов.*

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 4.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 4.3

Если $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то для любого $\beta \in R$ выполняется равенство

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$

Доказательство

Рассмотрим выражения: $a^{\log_a x^\beta}$ и $a^{\beta \log_a x}$. Докажем, что они равны.

Имеем: $a^{\log_a x^\beta} = x^\beta$;

$a^{\beta \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\beta = x^\beta$.

Следовательно, $a^{\log_a x^\beta} = a^{\beta \log_a x}$. Отсюда по теореме 2.1 получаем: $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$. ◄

Теорема 4.4

(переход от одного основания логарифма к другому)

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ и $c \neq 1$, то выполняется равенство

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Доказательство

Рассмотрим выражение $\log_a b \cdot \log_c a$. Преобразуем его, воспользовавшись теоремой 4.3 для $\beta = \log_a b$. Имеем:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Следовательно, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Поскольку $a \neq 1$, то $\log_c a \neq 0$. Теперь можно записать: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ◄

Следствие 1

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $b \neq 1$, то выполняется равенство

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Докажите это следствие самостоятельно.

Следствие 2

Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, то для любого $\beta \neq 0$ выполняется равенство

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b$$

Доказательство

В выражении $\log_{a^\beta} b$ перейдём к основанию a и применим теорему 4.3:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta \log_a a} = \frac{1}{\beta}\log_a b. ◄$$

Пример 1. Решите уравнение: 1) $3^x = 7$; 2) $0{,}4^{2x-5} = 9$.

Решение. 1) Из определения логарифма следует, что $x = \log_3 7$.

2) Имеем: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Ответ: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$. ◄

Пример 2. Вычислите значение выражения: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Решение. 1) Применяя свойства степени и основное логарифмическое тождество, получаем:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Имеем: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} = \left(3^{\log_3 4}\right)^2 : 3 = 4^2 : 3 = \dfrac{16}{3}$. ◄

Пример 3. При каком значении x выполняется равенство: 1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Решение. 1) Выражение $\log_{\frac{1}{2}} x$ определено при $x > 0$. Из определения логарифма следует, что $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = x$, то есть $x = 32$.

2) Выражение $\log_x 16$ определено при $x > 0$ и $x \neq 1$. Согласно определению логарифма имеем: $x^4 = 16$. Учитывая, что $x > 0$, получаем $x = 2$. ◄

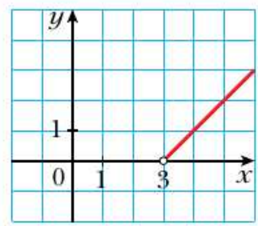
Пример 4. Вычислите значение выражения: 1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$; 2) $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8$.

Решение. 1) Применяя теоремы о логарифме произведения и логарифме частного, получаем:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 = \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

2) Имеем: $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8 = \frac{1}{2}\log_{36} 3^2 + \frac{1}{3}\log_{36} 2^3 = \frac{1}{2} \cdot 2\log_{36} 3 + \frac{1}{3} \cdot 3\log_{36} 2 = \log_{36} 3 + \log_{36} 2 = \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$. ◄

Рис. 4.4



Пример 5. Постройте график функции $f(x) = 5^{\log_5 (x-3)}$.

Решение. Данная функция определена на множестве $D(f) = (3; +\infty)$. Поскольку $5^{\log_5 (x-3)} = x - 3$ для всех значений $x \in D(f)$, то графиком функции f является часть прямой $y = x - 3$ (рис. 4.4). ◄

1. Что называют логарифмом положительного числа b по основанию a?
2. Какое равенство называют основным логарифмическим тождеством?
3. Какой логарифм называют десятичным?
4. Сформулируйте свойства логарифмов.

Упражнения

4.1. Верно ли равенство:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -3$;
2) $\log_{25} 5 = 2$;
3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$;
4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$;
5) $\log_{0,01} 10 = 2$;
6) $\lg 0,0001 = -4$;
7) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = \frac{2}{3}$;
8) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$?

4.2. Найдите логарифм по основанию 2 числа:

1) 1;
2) 2;
3) 32;
4) $\sqrt{2}$;
5) 0,5;
6) $\frac{1}{8}$;
7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
8) $2\sqrt{2}$.

4.3. Найдите логарифм по основанию 3 числа:

1) 3; 3) 1; 5) $\frac{1}{9}$; 7) $\sqrt{3}$;

2) $\frac{1}{3}$; 4) 81; 6) $\frac{1}{243}$; 8) $3\sqrt{3}$.

4.4. Найдите логарифм по основанию $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 3) 8; 5) $\frac{1}{16}$; 7) $\sqrt{2}$;

2) 2; 4) $0{,}25$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) 64.

4.5. Найдите логарифм по основанию $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

4.6. Найдите десятичный логарифм числа:

1) 1; 3) 100; 5) $0{,}1$; 7) $0{,}00001$;

2) 10; 4) 1000; 6) $0{,}01$; 8) $0{,}000001$.

4.7. Чему равен логарифм числа 10 000 по основанию:

1) 10; 3) $\sqrt{10}$; 5) 1000;

2) 100; 4) $0{,}1$; 6) $0{,}0001$?

4.8. Найдите логарифм числа 729 по основанию:

1) 27; 2) 9; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{3}$.

4.9. Решите уравнение:

1) $\log_7 x = -1$; 4) $\log_2 x = 0$; 7) $\log_x 2 = 2$;

2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 5) $\log_x 9 = 2$; 8) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$.

3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 6) $\log_x 0{,}25 = -2$;

4.10. Решите уравнение:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;

2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

4.11. Решите уравнение:

1) $6^x = 2$; 3) $0{,}4^x = 9$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;

2) $5^x = 10$; 4) $2^{x-3} = 5$; 6) $0{,}3^{3x+2} = 7$.

4.12. Решите уравнение:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

4.13. Вычислите:

1) $2^{\log_2 32}$; 3) $7^{2\log_7 2}$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$; 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$;

2) $5^{\log_5 0,45}$; 4) $64^{0,5\log_2 12}$; 6) $6^{1+\log_6 5}$; 8) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$.

4.14. Вычислите:

1) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$; 3) $4^{\log_2 9}$; 5) $10^{2+\lg 8}$;

2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6-3}$.

4.15. Найдите значение выражения:

1) $\log_6 3+\log_6 2$; 3) $\log_{49} 84-\log_{49} 12$; 5) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$;

2) $\log_5 100-\log_5 4$; 4) $\log_2 5-\log_2 35+\log_2 56$; 6) $2\lg 5+\frac{1}{2}\lg 16$.

4.16. Вычислите значение выражения:

1) $\lg 8+\lg 12,5$; 3) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$;

2) $\log_3 162-\log_3 2$; 4) $3\log_6 2+\frac{3}{4}\log_6 81$.

4.17. Представьте:

1) число 2 в виде степени числа 5;

2) число $\frac{1}{9}$ в виде степени числа 10;

3) число $\sqrt{14}$ в виде степени числа 7;

4) число 0,17 в виде степени числа 18.

4.18. Представьте:

1) число 3 в виде степени числа 8;

2) число $\sqrt[3]{6}$ в виде степени числа $\frac{1}{2}$.

4.19. Представьте:

1) число 6 в виде логарифма по основанию 2;

2) число -1 в виде логарифма по основанию 0,4;

3) число $\frac{1}{2}$ в виде логарифма по основанию 9;

4) число $\frac{2}{7}$ в виде логарифма по основанию 10.

4.20. Представьте:

1) число 4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{3}$;

2) число -2 в виде логарифма по основанию $\sqrt{2}$.

4.21. Вычислите:

1) $2^{3\log_2 5+4}$;
2) $8^{1-\log_2 3}$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;
4) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4}$;
5) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$;
6) $2\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}$;
7) $\lg(25^{\log_5 0,8}+9^{\log_3 0,6})$;
8) $27^{\frac{1}{\log_5 3}}+25^{\frac{1}{\log_2 5}}-36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

4.22. Вычислите:

1) $2^{4\log_2 3-1}$;
2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$;
3) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$;
4) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9-\log_{\frac{1}{6}} 3}$;
5) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 5}$;
6) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25-3\lg 2}$;
7) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}}+2^{\log_2 15+3}\right)$;
8) $5^{\log_5 4\cdot\log_2 3}$.

4.23. Вычислите:

1) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$;
2) $\log_{\frac{2}{3}}\log_{49} 343$;
3) $\log_9\log_2 8$;
4) $\log_2\sin 135^\circ$;
5) $\log_3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
6) $\log_{\frac{1}{2}}\cos 315^\circ$;
7) $\log_4\sin\frac{\pi}{4}$;
8) $\log_{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}(-120^\circ)$.

4.24. Вычислите:

1) $\log_3\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}\log_4 64$;
3) $\log_6\operatorname{tg} 225^\circ$;
4) $\log_{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

4.25. Найдите x, если:

1) $\log_7 x=2\log_7 8-4\log_7 2$;
2) $\lg x=2+\lg 3-\lg 5$;
3) $\log_3 x=\frac{2}{3}\log_3 216+\frac{1}{2}\log_3 25$;
4) $\lg x=\frac{2}{3}\lg 32-\frac{1}{3}\lg 128+1$;
5) $\log_2 x=3\log_2 5-2\log_2 25-\lg 10$.

4.26. Найдите x, если:

1) $\log_a x=3\log_a 2+2\log_a 3$;
2) $\log_a x=\frac{1}{4}\log_a 16+3\log_a 0,5$;
3) $\lg x=\frac{2}{5}\lg 32-\frac{1}{3}\lg 64+1$.

4.27. Вычислите значение выражения:

1) $\dfrac{\log_7 27-2\log_7 3}{\log_7 45+\log_7 0,2}$;
2) $\dfrac{\log_9 125+3\log_9 2}{\log_9 1,2-\log_9 12}$.

4.28. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0,5}{\lg 9 - \lg 18}$; 2) $\dfrac{\lg 625 - 8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256 - 2\lg 5}$.

4.29. Вычислите значение выражения:

1) $\log_7 \sin\frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$; 2) $\log_3 \cos^2\frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

4.30. Упростите выражение:

1) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$; 2) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

4.31. Вычислите значение выражения $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} + 36\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

4.32. Вычислите значение выражения $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3}\log_6 27} - 12\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$.

4.33. Упростите выражение $\dfrac{1 - \log_a^3 b}{\left(\log_a b + \log_b a + 1\right)\log_a \dfrac{a}{b}}$.

4.34. Упростите выражение $\dfrac{\log_a ab\left(\log_b a - 1 + \log_a b\right)}{1 + \log_a^3 b}$.

4.35. Докажите, что значение выражения $\log_{7+4\sqrt{3}}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$ является целым числом.

4.36. Докажите, что значение выражения $\log_{9-4\sqrt{5}}\left(9 + 4\sqrt{5}\right)$ является целым числом.

4.37. При каких значениях x верно равенство:

1) $\log_2(1 - x^2) = \log_2(1 - x) + \log_2(1 + x)$;

2) $\lg\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \lg(x^2 - 2x + 1) - \lg(x^2 + 1)$;

3) $\log_5(x^2 - 4x + 4) = 2\log_5(2 - x)$;

4) $\log_5(x^2 - 4x + 4) = 2\log_5|x - 2|$?

4.38. Чему равно значение выражения:

1) $\lg\sin 1^\circ \cdot \lg\sin 2^\circ \cdot \lg\sin 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg\sin 89^\circ \cdot \lg\sin 90^\circ$;

2) $\lg\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \ldots \cdot \lg\operatorname{tg} 75^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 80^\circ$;

3) $\lg(\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 34^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 58^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ)$;

4) $\lg\operatorname{tg} 1^\circ + \lg\operatorname{tg} 2^\circ + \lg\operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \lg\operatorname{tg} 88^\circ + \lg\operatorname{tg} 89^\circ$?

4.39. Упростите выражение $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9$.

4.40. Вычислите значение выражения $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

4.41. Постройте график функции:

1) $y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x$;

2) $y = \log_x 1$;

3) $y = 3^{\log_3 (x+3)}$;

4) $y = 5^{-\log_5 x}$;

5) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;

6) $y = 2^{\log_2 x^2}$;

7) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$;

8) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_{3-x} (3-x)^4$;

9) $y = 2^{\log_4 x^2}$.

4.42. Постройте график функции:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$;

2) $y = \dfrac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$;

3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 x^2}$;

4) $y = \log_x x$;

5) $y = \dfrac{\lg(x^2+1)}{\lg(x^2+1)}$;

6) $y = x^{\log_x 2x}$;

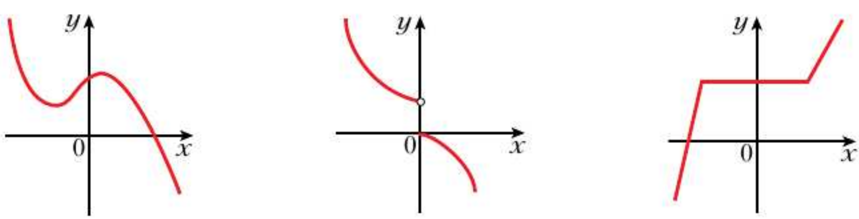
7) $y = \log_3 \log_{x+1} (x+1)^{27}$;

8) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2) \cdot \log_{x-2} \dfrac{1}{3}$.

Готовимся к изучению новой темы

4.43. Какая из функций, график которой изображён на рисунке 4.5, является обратимой?

Рис. 4.5



а *б* *в*

4.44. Докажите, что функции $y = 4x - 3$ и $y = \dfrac{x+3}{4}$ являются взаимно обратными.

4.45. Найдите функцию, обратную данной:

1) $y = 5x - 1$; 2) $y = \dfrac{1}{x+2}$; 3) $y = \dfrac{1}{3x-1}$; 4) $y = \dfrac{2}{7}x - 4$.

4.46. Постройте в одной системе координат график данной функции и график функции, обратной ей:

1) $y = -0{,}4x + 2$; 2) $y = \sqrt{x - 2}$.

§ 5. Логарифмическая функция и её свойства

Выберем положительное число a, отличное от 1. Каждому положительному числу x можно поставить в соответствие число y такое, что $y = \log_a x$. Такое правило задаёт функцию $f(x) = \log_a x$ с областью определения $D(f) = (0; +\infty)$.

Эту функцию называют **логарифмической**.

Покажем, что логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ является обратной к показательной функции $g(x) = a^x$.

Для любого $y_0 \in \boldsymbol{R}$ уравнение $\log_a x = y_0$ имеет корень (он равен a^{y_0}). Это означает, что *областью значений логарифмической функции является множество* $\boldsymbol{R}$.

Имеем: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$;

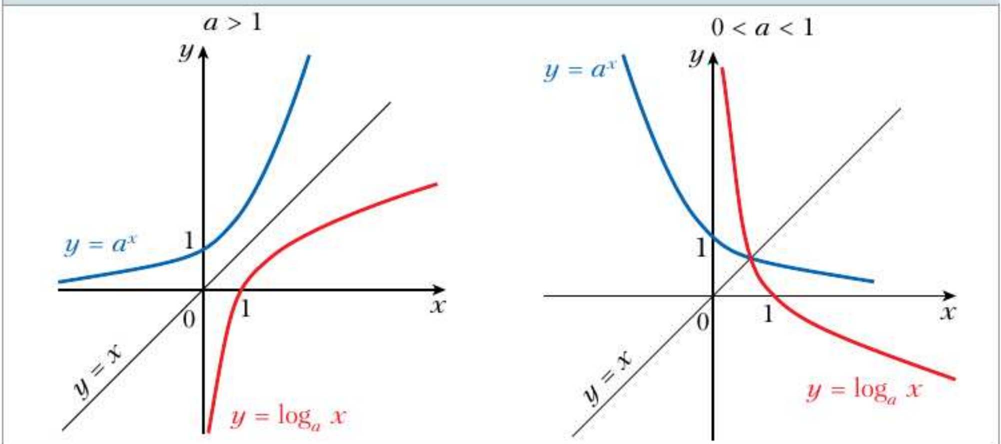
$E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Для любого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ выполняется равенство $a^{\log_a x} = x$. Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$. Сказанное означает, что f и g – взаимно обратные функции.

Поскольку графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, то, пользуясь графиком показательной функции $y = a^x$, можно построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ (рис. 5.1).

Функция $y = \log_a x$ *имеет единственный нуль:* $x = 1$.

Рис. 5.1



Функция $y = \log_a x$ имеет два промежутка знакопостоянства: $(0; 1)$ *и* $(1; +\infty)$.

Если $a > 1$, *то* $y < 0$ *на* $(0; 1)$; $y > 0$ *на* $(1; +\infty)$;

если $0 < a < 1$, *то* $y < 0$ *на* $(1; +\infty)$; $y > 0$ *на* $(0; 1)$.

Если функция возрастающая (убывающая), то обратная к ней функция является также возрастающей (убывающей). Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$.

Поэтому *функция $y = \log_a x$ является возрастающей при $a > 1$ и убывающей при* $0 < a < 1$.

Поскольку логарифмическая функция является либо возрастающей (при $a > 1$), либо убывающей (при $0 < a < 1$), то она *не имеет точек экстремума*.

Графики взаимно обратных функций являются равными фигурами. Поэтому если определённая на некотором промежутке функция является обратимой и непрерывной, то обратная к ней функция также непрерывна. Показательная функция $y = a^x$ непрерывна.

Поэтому *функция $y = \log_a x$ является непрерывной*.

Опираясь на равенство графиков функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$, можно также установить следующее.

Логарифмическая функция дифференцируема. Подробнее о производной логарифмической функции вы узнаете в § 8.

График функции $y = \log_a x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, *когда x стремится к нулю справа*.

В таблице приведены свойства функции $y = \log_a x$, изученные в этом параграфе.

Область определения	$(0; +\infty)$
Область значений	$\boldsymbol{R}$
Нули функции	$x = 1$
Промежутки знакопостоянства	Если $a > 1$, то $y < 0$ на $(0; 1)$, $y > 0$ на $(1; +\infty)$; если $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1; +\infty)$, $y > 0$ на $(0; 1)$
Возрастание/убывание	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая
Непрерывность	Непрерывная
Дифференцируемость	Дифференцируемая
Асимптоты	Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота, когда x стремится к нулю справа

Пример 1. Сравните с единицей основание a логарифма, если известно, что $\log_a 5 < \log_a 4$.

Решение. Предположим, что $a > 1$, тогда функция $y = \log_a x$ является возрастающей. Поэтому $\log_a 5 > \log_a 4$. Но по условию это не так. Значит, $a < 1$. ◄

Пример 2. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x)$;

2) $f(x) = \dfrac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x + 2)}$;

3) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

Решение. 1) Поскольку область определения логарифмической функции — множество положительных чисел, то областью определения данной функции является множество решений неравенства $x^2 + 3x > 0$.

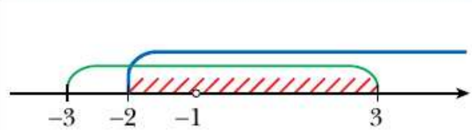
Имеем: $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ или $x > 0$.

Следовательно, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Выражение $\lg(9 - x^2)$ имеет смысл при $9 - x^2 > 0$, выражение $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Кроме того, знаменатель дроби не может быть равным нулю, поэтому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким образом, область определения $D(f)$ данной функции — это множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Рис. 5.2



Отсюда $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Обратившись к рисунку 5.2, приходим к выводу, что последняя система равносильна совокупности $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 3. \end{array}\right.$

Следовательно, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область определения данной функции найдём, решив систему неравенств:

$$\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array}\right.$

Отсюда $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◄

Пример 3. Сравните: 1) $\log_2 6$ и $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ и $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_6 7$ и $\log_7 6$; 4) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ и 0; 5) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ и -2.

Решение. 1) Поскольку логарифмическая функция $y = \log_2 x$ — возрастающая, то $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Поскольку логарифмическая функция $y = \log_{0,2} x$ — убывающая, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Имеем: $\log_6 7 > \log_6 6$, то есть $\log_6 7 > 1$. Вместе с тем $\log_7 7 > \log_7 6$, то есть $1 > \log_7 6$. Следовательно, $\log_6 7 > 1 > \log_7 6$.

4) Учитывая, что $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, имеем: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$. Следовательно, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$.

5) Имеем: $-2 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{6}} 36$. Поскольку $\log_{\frac{1}{6}} 38 < \log_{\frac{1}{6}} 36$, то $\log_{\frac{1}{6}} 38 < -2$. ◄

1. Какую функцию называют логарифмической?

2. Сформулируйте свойства логарифмической функции.

Упражнения

5.1. Возрастающей или убывающей является функция:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;
2) $y = \log_3 x$;
3) $y = \log_{0,1} x$;
4) $y = \lg x$;
5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;
6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$;
7) $y = \log_{\sqrt{2}-1} x$;
8) $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$?

5.2. На основании какого свойства логарифмической функции можно утверждать, что:

1) $\lg 7 > \lg 5$;
2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

5.3. Сравните:

1) $\log_{12} 5$ и $\log_{12} 6$;
2) $\log_5 \frac{1}{2}$ и $\log_5 \frac{1}{3}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ и $\log_{\frac{1}{3}} 4$;
4) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{5}$ и $\log_{\frac{1}{9}} \frac{5}{6}$;
5) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0{,}7$ и $\log_{\frac{\pi}{2}} 0{,}6$;
6) $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8{,}4$ и $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8{,}3$.

5.4. Сравните:

1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ и $\log_{0,9} \sqrt{2}$;
2) $\log_7 \frac{2}{3}$ и $\log_7 \frac{1}{2}$;
3) $\log_{\frac{2}{3}} 6{,}8$ и $\log_{\frac{2}{3}} 6{,}9$;
4) $\lg \frac{\pi}{3}$ и $\lg \frac{\pi}{4}$.

5.5. Сравните с единицей основание логарифма, если:

1) $\log_a 0{,}5 > \log_a 0{,}4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

5.6. Сравните с единицей основание логарифма, если:

1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$;
2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$.

5.7. Положительным или отрицательным числом является:

1) $\log_{0,5} 0{,}6$; 2) $\log_{0,3} 3$; 3) $\log_2 0{,}27$; 4) $\log_{\pi} 3$?

5.8. Сравните с нулём:

1) $\log_4 5$; 2) $\log_2 \frac{1}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$.

5.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;
2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;
3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

5.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;
2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

5.11. На каком промежутке наибольшее значение функции $y = \log_2 x$ равно 3, а наименьшее равно -1?

5.12. На каком промежутке наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ равно -1, а наименьшее равно -2?

5.13. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_3 (x + 1)$;
2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)$;
3) $f(x) = \log_4 (-x)$;
4) $f(x) = \lg x^2$;
5) $f(x) = \log_5 (x^2 + x + 1)$;
6) $f(x) = \log_{0,6} (5x - 6 - x^2)$;
7) $f(x) = 2\lg x + 3\lg (2 - x)$;
8) $f(x) = \log_2 \dfrac{2x - 3}{x + 7}$.

5.14. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_7 (6 - x)$;
2) $f(x) = \log_{12} |x|$;
3) $f(x) = \lg (x^2 - 1)$;
4) $f(x) = \log_{0,4} (7x - x^2)$;
5) $f(x) = \lg (x + 2) - 2\lg (x + 5)$;
6) $f(x) = \lg \dfrac{2x + 1}{x - 1}$.

5.15. Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$. Каково взаимное расположение построенных графиков?

5.16. Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = \log_3 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Каково взаимное расположение построенных графиков?

5.17. Сравните:

1) $\log_9 2$ и 3;
2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ и -2;
3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ и 6;
4) $\log_{16} 0,1$ и $-\dfrac{3}{4}$.

5.18. Сравните:

1) $\log_{0,1} 12$ и 1;
2) $\log_4 3$ и $-\dfrac{1}{2}$;
3) $\dfrac{2}{3}$ и $\log_{125} 30$.

5.19. Между какими двумя последовательными целыми числами находится число:

1) $\log_3 10$;
2) $\log_2 5$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$;
4) $\log_{0,1} 2$?

5.20. Между какими двумя последовательными целыми числами находится число:

1) $\log_2 29$;
2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

5.21. Сравните:

1) $\log_4 5$ и $\log_5 4$;
2) $\log_{1,5} 1,3$ и $\log_{1,3} 1,5$;
3) $\log_{0,7} 0,8$ и $\log_{0,8} 0,7$;
4) $\log_{0,2} 0,1$ и $\log_{0,1} 0,2$.

5.22. Сравните:

1) $\log_{1,7} 1,8$ и $\log_{1,8} 1,7$;
2) $\log_{0,2} 0,3$ и $\log_{0,3} 0,2$.

5.23. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\lg x}$;

2) $f(x) = \dfrac{4}{\log_5(10 - x)}$;

3) $f(x) = \log_2 \cos x$;

4) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$.

5.24. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{5}{\lg(x + 3)}$;

2) $y = \lg \sin x$.

5.25. Постройте график функции:

1) $y = \log_2 (x - 1)$;

2) $y = \log_2 (x + 3)$;

3) $y = \log_2 x - 1$;

4) $y = \log_2 x + 3$;

5) $y = -\log_2 x$;

6) $y = \log_2 (-x)$.

5.26. Постройте график функции:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$;

2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$;

3) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$;

4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$;

5) $y = -\log_{\frac{1}{3}} x$;

6) $y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$.

5.27. Решите графически уравнение:

1) $\log_2 x = 3 - x$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$;

3) $\log_2 x = -x - 0{,}5$.

5.28. Решите графически уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \dfrac{1}{2}$;

2) $\log_3 x = 4 - x$.

5.29. Определите графически количество корней уравнения:

1) $\log_2 x = -x$;

2) $\log_3 x = -x^2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x}$.

5.30. Сколько корней имеет уравнение:

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$;

2) $\log_2 x = \dfrac{1}{x}$?

5.31. Сравните $\log_2 3 + \log_3 2$ и 2.

5.32. Докажите, что $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_4 \dfrac{1}{3} < -2$.

5.33. Найдите область определения функции:

1) $y = \lg(1 - \sin x)$;

2) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1 + x^2)}$;

3) $y = \sqrt{\lg \cos x}$;

4) $y = \dfrac{1}{\log_6(x - 3)} + \sqrt{6 - x}$;

5) $y = \sqrt{\dfrac{(x + 1)(3 - x)}{\lg(x^2 + 1)}}$;

6) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3) + \dfrac{1}{\log_5(7 - x)}$;

7) $y = \lg(6x - x^2) + \dfrac{1}{\lg(3 - x)}$;

8) $y = \log_{x + 3}(x^2 + x)$.

5.34. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{\lg(x^2 + 1)}$;

2) $y = \lg(1 + \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\lg(1 + x^2)}$;

4) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;

5) $y = \lg(x + 8) - \dfrac{5}{\lg(-x - 1)}$;

6) $y = \lg(10x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(8 - x)}$;

7) $y = \dfrac{x}{\lg(4 - x^2)}$;

8) $y = \lg(9x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(5 - x)}$;

9) $y = \log_{2 - x}(8 + 7x - x^2)$;

10) $y = \sqrt{\dfrac{(x + 5)(2 - x)}{\lg(x^2 + 1)}}$.

5.35. Постройте график функции:

1) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$;

3) $y = \dfrac{\left|\log_{0,2} x\right|}{\log_{0,2} x}$;

4) $y = \sqrt{\log_3^2 x}\,\log_x 3$.

5.36. Постройте график функции:

1) $y = |\log_3 x|$;

2) $y = \log_3|x|$;

3) $y = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x}}$.

Упражнения для повторения

5.37. Упростите выражение $\sqrt{\dfrac{a - 2\sqrt{a - 1}}{a + 2\sqrt{a - 1}}} + \sqrt{\dfrac{a + 2\sqrt{a - 1}}{a - 2\sqrt{a - 1}}} - \dfrac{4}{\sqrt{a^2 - 4a + 4}}$.

5.38. Решите уравнение $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4$.

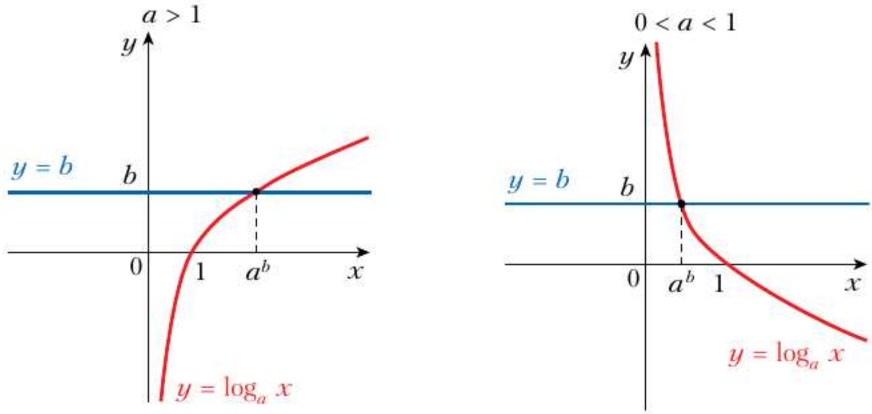
5.39. Решите неравенство $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\leqslant\frac{2}{x+2}$.

§ 6. Логарифмические уравнения

Уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют **простейшим логарифмическим уравнением**.

Поскольку графики функций $y = \log_a x$ и $y = b$ пересекаются в одной точке (рис. 6.1), то простейшее логарифмическое уравнение имеет единственный корень при любом b. Этот корень можно найти, используя определение логарифма. Имеем: $x = a^b$.

Рис. 6.1



Пример 1. Решите уравнение $\log_3(3x-1)=2$.

Решение. По определению логарифма можно записать: $3x - 1 = 3^2$. Отсюда $3x - 1 = 9$; $x = \frac{10}{3}$.

Ответ: $\frac{10}{3}$. ◄

Решённое уравнение — частный случай уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Рассуждая, как в примере 1, можно показать, что это уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

При решении многих логарифмических уравнений применяют следующую теорему.

Теорема 6.1

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, и наоборот, если $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Поскольку логарифмическая функция является возрастающей или убывающей, то для доказательства этой теоремы можно воспользоваться идеей доказательства теоремы 2.1. Убедитесь в этом самостоятельно.

Следствие

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно любой из систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Выбор соответствующей системы, как правило, связан с тем, какое из неравенств, $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$, решить легче.

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 2.1, докажите следствие из теоремы 6.1 самостоятельно.

Теперь решение уравнения примера 1 можно оформить так:

$$\log_3(3x-1) = 2\log_3 3;$$

$$\log_3(3x-1) = \log_3 3^2;$$

$$3x - 1 = 3^2;\ x = \frac{10}{3}.$$

Пример 2. Решите уравнение $\lg(x^2 - 4x + 2) = \lg(2x - 3)$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Имеем: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ Отсюда $x = 5$.

Ответ: 5. ◄

Пример 3. Решите уравнение $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$.

Решение. Естественно преобразовать это уравнение следующим образом:

$$\log_3((2x-1)(x-2))=3.$$

Отсюда $(2x-1)(x-2)=3^3$; $2x^2-5x-25=0$; $x=5$ или $x=-\frac{5}{2}$.

Легко убедиться, что число $-\frac{5}{2}$ не является корнем данного уравнения (это число не входит в его область определения), а число 5 является корнем данного уравнения.

Таким образом, данное уравнение решено методом следствий.

Ответ: 5. ◄

Обратим внимание, что переход от уравнения $\log_3(2x-1)+$ $+\log_3(x-2)=3$ к уравнению $\log_3((2x-1)(x-2))=3$ не является равносильным и приводит к появлению постороннего корня.

Выясним причину возникновения постороннего корня.

Область определения исходного уравнения задаётся системой неравенств $\begin{cases}2x-1>0,\\ x-2>0,\end{cases}$ множеством решений которой является промежуток $(2;\ +\infty)$. Заменив выражение $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)$ на выражение $\log_3((2x-1)(x-2))$, мы расширили область определения исходного уравнения. Действительно, область определения уравнения $\log_3((2x-1)(x-2))=3$ задаётся неравенством $(2x-1)(x-2)>0$, множеством решений которого является объединение промежутков $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)\cup(2;\ +\infty)$.

Следовательно, расширение области определения уравнения от множества $(2;\ +\infty)$ до множества $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)\cup(2;\ +\infty)$ и стало причиной появления постороннего корня $-\frac{5}{2}$.

Решение уравнения из примера 3 можно оформить следующим образом.

Уравнение $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$ равносильно системе

$$\begin{cases}\log_3((2x-1)(x-2))=3,\\ 2x-1>0,\\ x-2>0.\end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases}(2x-1)(x-2)=3^3,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-5x-25=0,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-\frac{5}{2},\end{array}\right.\\ x>2.\end{cases}$

Получаем $x=5$.

Пример 4. Решите уравнение $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

Решение. Поскольку $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, то данное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Пусть $\log_2 x = t$. Тогда получаем: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$. Это уравнение равносильно системе

$\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Тогда исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{array}\right.$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Ответ: $\sqrt{2}$; 4. ◄

Пример 5. Решите уравнение $x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = 10^{2 + \lg x}$.

Решение. Поскольку на области определения уравнения, то есть на множестве $(0; +\infty)$, обе его части принимают положительные значения, то можем записать уравнение, равносильное данному:

$$\lg x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = \lg 10^{2 + \lg x}. \text{ Отсюда } \frac{\lg x + 2}{3} \cdot \lg x = 2 + \lg x.$$

Пусть $\lg x = t$. Тогда $\frac{(t + 2)t}{3} = 2 + t$. Получаем $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = 3. \end{array}\right.$ Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \lg x = -2, \\ \lg x = 3. \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = 10^{-2}, \\ x = 10^3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0{,}01, \\ x = 1000. \end{array}\right.$

Ответ: 0,01; 1000. ◄

Какую теорему и какое следствие из неё применяют при решении логарифмических уравнений?

Упражнения

6.1. Решите уравнение:

1) $\log_2 (x-1) = 1$;
2) $\log_3 (2x+1) = 3$;
3) $\lg (3-2x) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} (4x-8) = -2$;
5) $\log_7 (x^2 - 2x - 8) = 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) = -4$.

6.2. Решите уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{5}} (x+7) = -3$;
2) $\log_4 (2x-5) = 0{,}5$;
3) $\log_{\sqrt{3}} (x^2 - 5x - 3) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 6) = -1$.

6.3. Решите уравнение:

1) $\log_\pi (x+1) = \log_\pi (4x-5)$;
2) $\log_5 (3x-5) = \log_5 (x-3)$;
3) $\lg (x^2 + 2) = \lg (3x+6)$.

6.4. Решите уравнение:

1) $\log_9 (4x-6) = \log_9 (x-2)$;
2) $\log_{\frac{1}{4}} (x+7) = \log_{\frac{1}{4}} (x^2+5)$.

6.5. Решите уравнение:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;
2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;
3) $\log_6 x + 2\log_{36} x + 3\log_{216} x = 3$;
4) $\log_7 \log_4 (x-2) = 0$;
5) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

6.6. Решите уравнение:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$;
2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;
3) $\lg \lg \lg x = 0$.

6.7. Решите уравнение:

1) $\log_2 (3^{5x-3} + 1) = 2$;
2) $\log_3 (3^{x-1} + 6) = x$;
3) $\log_2 (2^x + 7) = 3 - x$;
4) $\log_6 (6^{-x} - 5) = x + 1$.

6.8. Решите уравнение:

1) $\log_6 (6^{x+1} - 30) = x$;
2) $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$.

6.9. Решите уравнение:

1) $\lg (x^2 - 2x) = \lg (2x + 12)$;
2) $\log_4 (x-1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$;
3) $\log_{0,5} (x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5} (x-2)$;
4) $\log_6 (x^2 - x - 2) = \log_6 (2-x)$;
5) $2\log_{0,4} x = \log_{0,4} (2x^2 - x)$;
6) $2\log_7 (-x) = \log_7 (x+2)$;
7) $2\log_8 (1-x) = \log_8 (2{,}5x + 1)$;
8) $2\log_3 x = 1 + \log_3 (x+6)$.

6.10. Решите уравнение:

1) $\log_6(9-x^2)=\log_6(1-2x)$;

2) $\lg(x^2+2x-3)=\lg(2x^2-2)$;

3) $\log_{0,7}(2x^2-9x+4)=2\log_{0,7}(x+2)$;

4) $2\log_2(-x)-\log_2(3x+8)=1$.

6.11. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}\log_6(5x+1)=\log_6(x-1)$;

2) $\log_5(25^x-2\cdot5^x)=2\log_{25}15$;

3) $\log_{\sqrt{5}}(16^x-6)=2+\log_{\sqrt{5}}(4^x-2)$;

4) $x\lg3-1=2\lg3-\lg(3^x+1)$.

6.12. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}\log_{0,1}(2x+3)-\log_{0,1}(2x-3)=0$;

2) $\log_3(2^{2x}+2^x)=2\log_9 12$;

3) $x-\lg5=x\lg5+2\lg2-\lg(1+2^x)$.

6.13. Решите уравнение:

1) $\log_4(x-3)+\log_4 x=1$;

2) $\log_{0,5}(4-x)+\log_{0,5}(x-1)=-1$;

3) $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg5$;

4) $\log_3(2x-1)+\log_3(x-4)=2$;

5) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg0,18$;

6) $\lg(x-1)+\lg(x-3)=\lg(1,5x-3)$;

7) $\log_2(5-x)-\log_2(x-1)=1-\log_2(x+2)$;

8) $2\log_5(x+1)-\log_5(x+9)=\log_5(3x-17)$.

6.14. Решите уравнение:

1) $\log_7 x+\log_7(x+6)=1$;

2) $\log_3(5-x)+\log_3(3-x)=1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(4x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=\log_{0,5}3,5$;

4) $\log_{0,6}(x+2)+\log_{0,6}(6-x)=\log_{0,6}(x+8)$;

5) $\log_2(2x-1)-\log_2(x+2)=2-\log_2(x+1)$;

6) $2\lg(x+1)-\lg(4x-5)=\lg(x-5)$.

6.15. Решите уравнение:

1) $\log_3(5^x+2)+\log_3(5^x-1)=2+\log_3 2$;

2) $\log_2(2^x+3)+\log_2(5-2^x)=4$.

6.16. Решите уравнение:

1) $\log_{\sqrt{3}}(2^x - 3) + \log_{\sqrt{3}}(2^x - 1) = 2$;

2) $\lg(3^x - 4) + \lg(3^x - 2) = 1$.

6.17. Решите уравнение:

1) $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$;

2) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;

3) $\lg^2 x - 2\lg x^2 + 3 = 0$;

4) $\log_5 x + \log_x 5 = 2{,}5$;

5) $2\log_{\frac{1}{6}} x + 3\sqrt{\log_{\frac{1}{6}} x} - 5 = 0$;

6) $\dfrac{2}{\lg(x+2) - 3} + \dfrac{4}{\lg(x+2) + 1} = 1$.

6.18. Решите уравнение:

1) $3\log_8^2(-x) - 2\log_8(-x) - 1 = 0$;

2) $2\log_7 \sqrt{x} = \log_7^2 x - 6$;

3) $3\log_3 x + 3\log_x 3 = 10$;

4) $\dfrac{\lg x}{\lg x + 2} - \dfrac{2}{\lg x - 1} = 1$.

6.19. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2\lg x}{\lg(8x - 7)} = 1$;

2) $\dfrac{\log_4(x^2 + x - 2) - 1}{\log_4(x - 1)} = 0$;

3) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$;

4) $\log_{x+1}(x + 3) = 2$;

5) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2$.

6.20. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2\log_2 x}{\log_2(3 - 2x)} = 1$;

2) $\dfrac{\log_5(x^2 - 9x + 25) - 1}{\lg(x - 3)} = 0$;

3) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$;

4) $\log_x(x + 6) = 2$;

5) $\log_{2x-3}(3x^2 - 7x + 3) = 2$.

Готовимся к изучению новой темы

6.21. Решите неравенство:

1) $(x^2 - 6x + 5)(3x - 1)^2 \leqslant 0$;

2) $(x^2 - x - 2)(x^2 - 4x + 3) \geqslant 0$;

3) $(x + 7)\sqrt{x + x^2 - 20} > 0$;

4) $\dfrac{x - 1}{x + 1} < x$.

§ 7. Логарифмические неравенства

При решении многих логарифмических неравенств используют следующую теорему.

Теорема 7.1

При $a > 1$ неравенство $\log_a x_1 > \log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$ неравенство $\log_a x_1 > \log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $0 < x_1 < x_2$.

Справедливость этой теоремы следует из того, что при $a > 1$ логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей.

Следствие

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 2.1, докажите это следствие самостоятельно.

Пример 1. Решите неравенство $\log_2 x > 3$.
Решение. Поскольку $3 = \log_2 2^3$, то можно записать:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Это неравенство равносильно такому: $x > 2^3$. Отсюда $x > 8$.
Ответ: $(8; +\infty)$. ◄

Пример 2. Решите неравенство $\log_{0,3} x \geqslant 1$.
Решение. Имеем: $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} 0,3$.
Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \leqslant 0,3, \\ x > 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0,3]$. ◄

Пример 3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} 3x-4 > x-2, \\ x-2 > 0. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$. ◄

Пример 4. Решите неравенство $\log_x 3 - \frac{5}{2} - \log_{\frac{1}{3}} x > 0$.

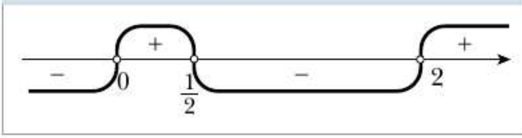
Решение. Имеем: $\frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} + \log_3 x > 0$.

Пусть $\log_3 x = t$. Тогда последнее неравенство приобретает вид $\frac{1}{t} - \frac{5}{2} + t > 0$. Отсюда

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0;$$

$$\frac{(2t-1)(t-2)}{2t} > 0.$$

Рис. 7.1



Воспользовавшись методом интервалов (рис. 7.1), получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{1}{2}, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

Далее, $\left[\begin{array}{l} 0 < \log_3 x < \frac{1}{2}, \\ \log_3 x > 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9. \end{array}\right.$

Ответ: $(1; \sqrt{3}) \cup (9; +\infty)$. ◄

Какую теорему и какое следствие из неё применяют при решении логарифмических неравенств?

Упражнения

7.1. Решите неравенство:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;

2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;

3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;

4) $\log_7 x < \log_7 15$;

5) $\log_{\frac{3}{7}} (x+5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;

6) $\log_8 (2x-3) > \log_8 7$;

7) $\log_{\frac{2}{9}} (x-4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;

8) $\lg (1 + 3x) < \lg 16$.

7.2. Решите неравенство:

1) $\lg x < \lg 4$;
2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$;
3) $\log_{12}(x-8) > \log_{12} 3$;
4) $\log_{16}(4x-6) < \log_{16} 10$;
5) $\log_{\frac{8}{11}}(2-x) < \log_{\frac{8}{11}} 2$;
6) $\log_{0,9}(2x+1) > \log_{0,9} 5$.

7.3. Решите неравенство:

1) $\log_7 x > 2$;
2) $\log_5 x \leqslant -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 5$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$;
5) $\log_2(5x+1) > 4$;
6) $\log_{0,6}(x-2) < 2$;
7) $\log_3(2x-1) \leqslant 3$;
8) $\log_7(9x+4) \leqslant 2$;
9) $\log_{0,5}(2x+1) \geqslant -2$;
10) $\log_{0,2}(x+6) \geqslant -1$.

7.4. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x < -1$;
2) $\log_4 x > 2$;
3) $\lg x < 5$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} x > -3$;
5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3) \geqslant -2$;
6) $\log_9(5x+6) \leqslant 2$.

7.5. Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $\log_{0,25}(3x-5) > -3$; 2) $\log_3(7-x) < 3$?

7.6. Найдите целые решения неравенства:

1) $\log_{0,5}(1-x) > -1$; 2) $\log_{36}(x+1) \leqslant 0,5$.

7.7. Найдите множество решений неравенства:

1) $\lg(2x+3) > \lg(x-1)$;
2) $\log_5 2x < \log_5(x+1)$;
3) $\log_{0,2}(2x-1) > \log_{0,2}(3x-4)$;
4) $\log_{0,4}(x^2-3) < \log_{0,4}(x+3)$;
5) $\log_{0,7}(x^2-2x-3) \leqslant \log_{0,7}(9-x)$;
6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+31) \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(10x+11)$.

7.8. Решите неравенство:

1) $\log_2(2x-3) < \log_2(x+1)$;
2) $\log_{0,6}(3-2x) > \log_{0,6}(5x-2)$;
3) $\lg(x^2-2) \geqslant \lg(4x+3)$;
4) $\log_{0,1}(10-2x) \geqslant \log_{0,1}(x^2-x-2)$.

7.9. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{4}}(x+1) > -\frac{3}{2}$;
2) $\log_{\sqrt{3}}(12-x^2) > 2$;
3) $\log_{\frac{1}{7}}(3-x) > -1$;
4) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) > \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$.

7.10. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{6}}(x+2) \leqslant 0$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(6-x) > -2$;

3) $\log_{0,3}(4x-3) \geqslant \log_{0,3}(x+3)$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) \geqslant -1$.

7.11. Найдите множество решений неравенства:

1) $\log_8(x^2-4x+3) \leqslant 1$;

2) $\log_{0,5}(x^2+x) > -1$;

3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25) > 0$;

4) $\log_2(x^2-3x) \leqslant 2$;

5) $\log_2 \dfrac{4x-5}{4x+7} > 0$;

6) $\lg \dfrac{x^2-1}{(x-2)^2} > 0$;

7) $\log_3 \dfrac{2x+5}{x+1} \leqslant 1$;

8) $\log_4 \dfrac{3x-1}{x} \leqslant 0,5$.

7.12. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7) > 0$;

2) $\log_9(x^2-6x+8) \leqslant 0,5$;

3) $\log_{0,5}(x^2+3x) \geqslant -2$;

4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1) \geqslant 0$;

5) $\log_4 \dfrac{3x-1}{x-1} \leqslant 1$;

6) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{3x+1} > 1$.

7.13. Решите неравенство:

1) $\log_{0,3}(x^2+x-12) \geqslant \log_{0,3}(6x-6)$;

2) $\lg(x^2-x) \leqslant \lg(3x-3)$;

3) $\log_{0,8}(1-x^2) > \log_{0,8}(x^2+5x-2)$;

4) $2\log_2(2x+7) \geqslant 5+\log_2(x+2)$;

5) $\log_3(x^2+2x-3) \leqslant \log_3(x+9)$;

6) $\log_{\frac{1}{7}}(2x^2+3x+1) \geqslant 2\log_{\frac{1}{7}}(1-x)$.

7.14. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x) < \log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;

2) $\log_{0,1}(x^2-3x-4) \geqslant \log_{0,1}(x+1)$;

3) $2\log_2(x+5) \leqslant 3+\log_2(11+x)$;

4) $\lg(2x^2-9x+4) \leqslant 2\lg(x+2)$.

7.15. Решите неравенство:

1) $\lg x + \lg(x-3) > 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_{\frac{1}{3}} x < -1$;

3) $\log_2 x + \log_2(x+4) < 5$;

4) $\log_{0,1}(x-5) + \log_{0,1}(x-2) \geqslant -1$;

5) $\log_6(5x+8) + \log_6(x+1) \leqslant 1 - \log_6 3$;

6) $\log_3(1-x) + \log_3(-5x-2) \geqslant 2\log_3 2 + 1$.

7.16. Решите неравенство:

1) $\log_2(-x) + \log_2(1-x) \leqslant 1$;

2) $\log_{0,2}(x-1) + \log_{0,2}(x+3) \geqslant -1$;

3) $\log_3(x-2) + \log_3(x-10) \geqslant 2$;

4) $\log_7 x + \log_7(3x-8) \geqslant 1 + 2\log_7 2$.

7.17. Решите неравенство:

1) $\log_{0,2}^2 x \leqslant 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x \geqslant 4$;

3) $\lg^2 x + 3\lg x - 4 < 0$;

4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x + 2\log_{\frac{1}{4}} x - 8 \leqslant 0$;

5) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \geqslant 0$;

6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x - 5\log_{\frac{1}{9}} x + 2 \geqslant 0$.

7.18. Решите неравенство:

1) $\log_{0,5}^2 x \geqslant 9$;

2) $\lg^2 x - 2\lg x - 3 \geqslant 0$;

3) $2\log_4^2 x - \log_4 x - 1 < 0$;

4) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 2 \leqslant 0$.

7.19. Найдите множество решений неравенства:

1) $\log_2^2(4x) + 2\log_2 x - 11 < 0$;

2) $\log_3^2(27x) + 3\log_3 x - 19 \geqslant 0$;

3) $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 6}{\lg x} \geqslant 0$;

4) $2\log_5 x - \log_x 5 \leqslant 1$.

7.20. Решите неравенство:

1) $\log_7^2(7x) - \log_7 x \geqslant 3$;

2) $\log_6^2 \dfrac{x}{216} + 8\log_6 x - 12 \leqslant 0$;

3) $\dfrac{\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8}{\log_3 x - 1} \geqslant 0$;

4) $\log_{0,5} x - 2\log_x 0,5 \leqslant 1$.

7.21. Решите неравенство:

1) $\log_{1,6}\log_{0,5}(x^2 - x - 6) \geqslant 0$;

2) $\log_{0,5}\log_4(2x^2 + x - 1) < 1$;

3) $\log_{\frac{1}{9}}\log_3 \dfrac{x}{x-1} \geqslant 0$;

4) $\log_{1,5}\log_3 \dfrac{3x-5}{x+1} \leqslant 0$.

7.22. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{7}{4}} \log_5 (x^2 - 2x - 3) \leqslant 0$; 2) $\log_{0,8} \log_2 \frac{3x-1}{2-x} > 0$.

Готовимся к изучению новой темы

7.23. Найдите производную функции:

1) $y = (x-1)\sqrt[3]{x}$; 2) $y = \frac{x-1}{x^2+1}$; 3) $y = \sqrt{2-5x}$.

7.24. На графике функции $y = x^3 - 2x^2$ найдите точки, в которых касательная к графику параллельна прямой $y = -x + 11$.

7.25. Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции $y = \frac{x}{x^2+1}$.

§ 8. Производные показательной и логарифмической функций

Существует ли функция, производная которой равна самой функции? Ответить на этот вопрос легко. Например, функция, которая является нулевой константой, обладает этим свойством.

А можно ли указать такую функцию f, определённую на $\boldsymbol{R}$, отличную от нулевой константы, чтобы $f'(x) = f(x)$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$? Ответ на этот вопрос неочевиден.

Оказывается, что среди показательных функций $f(x) = a^x$ существует единственная функция такая, что $f'(x) = f(x)$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Для этой функции число, которое является основанием степени, обозначают буквой e, и саму функцию записывают в виде $f(x) = e^x$. Таким образом,

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Установлено, что число e — иррациональное. Его можно записать в виде бесконечной непериодической десятичной дроби:

$$e = 2{,}71828182845\ldots .$$

Функцию $f(x) = e^x$ называют **экспонентой**.

Отметим одну особенность графика экспоненты.

Имеем: $f'(0) = f(0) = e^0 = 1$.

Следовательно, касательная к графику экспоненты в точке с абсциссой, равной нулю, имеет угловой коэффициент, равный 1. Значит, эта касательная образует угол 45° с положительным направлением оси абсцисс (рис. 8.1).

Выведем формулу для нахождения производной показательной функции $f(x) = a^x$.

Имеем: $a = e^{\log_e a}$.

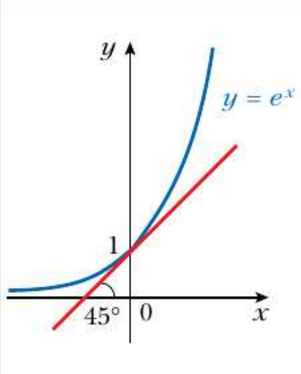
Тогда $a^x = e^{x \log_e a}$.

Пользуясь правилом вычисления производной сложной функции, запишем: $(a^x)' = (e^{x \log_e a})' = e^{x \log_e a} \cdot (x \log_e a)' = a^x \log_e a$.

Логарифм по основанию e называют **натуральным логарифмом** и обозначают $\ln a$, то есть $\log_e a = \ln a$.

Тогда при $a > 0$, $a \neq 1$ можно записать:

Рис. 8.1



$$(a^x)' = a^x \ln a$$

В § 5 было отмечено, что логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ является дифференцируемой. Найдём формулу для вычисления производной логарифмической функции.

Для любого $x > 0$ выполняется равенство $x = e^{\ln x}$. Тогда функции $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$ и $g(x) = e^{\ln x}$, $D(g) = (0; +\infty)$ представляют собой одну и ту же функцию. Поэтому для любого $x \in (0; +\infty)$ выполняется равенство $f'(x) = g'(x)$, то есть $(x)' = (e^{\ln x})'$.

Левая часть этого равенства равна 1. В правой части получаем: $(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x(\ln x)'$. Тогда $1 = x(\ln x)'$. Отсюда

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Имеем: $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Следовательно,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Покажем, как производную показательной функции можно использовать для нахождения производной **степенной функции** $f(x) = x^\alpha$, $D(f) = (0; +\infty)$, где α — произвольное действительное число.

Представим функцию $f(x) = x^\alpha$ в виде сложной функции $f(x) = e^{\alpha \ln x}$. Поскольку функции $y = e^x$ и $y = \alpha \ln x$ дифференцируемы, то функция f также является дифференцируемой.

Вычислим производную функции f. Имеем:

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Таким образом,

$$\boxed{(\boldsymbol{x}^{\alpha})' = \alpha \boldsymbol{x}^{\alpha - 1}}$$

Пример 1. Найдите производную функции:

1) $y = e^x(x^2 - 4x)$; 3) $y = e^{-7x}$; 5) $y = \log_6^2 x$;

2) $y = x^3 \cdot 3^x$; 4) $y = \dfrac{x^4}{\ln x}$; 6) $y = \log_2(3x - 4)$.

Решение. 1) Применяя теорему о производной произведения, получаем:

$$y' = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x = e^x(x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x =$$
$$= e^x(x^2 - 2x - 4).$$

2) Имеем: $y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2(3 + x\ln 3)$.

3) Используя теорему о производной сложной функции, запишем: $y' = (e^{-7x})' = e^{-7x} \cdot (-7x)' = -7e^{-7x}$.

4) Имеем:

$$y' = \frac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3(4\ln x - 1)}{\ln^2 x}.$$

5) Применяя теорему о производной сложной функции, получаем:

$$y' = (\log_6^2 x)' = 2\log_6 x \cdot (\log_6 x)' = \frac{2\log_6 x}{x \ln 6}.$$

6) Имеем: $y' = (\log_2(3x - 4))' = \dfrac{1}{(3x - 4)\ln 2} \cdot (3x - 4)' = \dfrac{3}{(3x - 4)\ln 2}$. ◄

Пример 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{3x} + x$, если эта касательная параллельна прямой $y = 4x - 9$.

Решение. Поскольку угловой коэффициент прямой $y = 4x - 9$ равен 4, то угловой коэффициент k искомой касательной тоже равен 4. Найдём абсциссу x_0 точки касания. Имеем:

$f'(x) = 3e^{3x} + 1$. Поскольку $f'(x_0) = 4$, то $3e^{3x_0} + 1 = 4$; $3e^{3x_0} = 3$; $e^{3x_0} = 1$; $x_0 = 0$. Отсюда $f(x_0) = 1$.

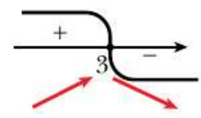
Тогда искомое уравнение имеет вид $y = 4x + 1$.

Ответ: $y = 4x + 1$. ◄

Пример 3. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции: 1) $f(x) = e^{6x - x^2 + 5}$; 2) $f(x) = x\ln x$; 3) $f(x) = \lg^3 x - 3\lg x + 2$.

Решение. 1) Имеем: $f'(x) = (e^{6x-x^2+5})' = e^{6x-x^2+5} \cdot (6x - x^2 + 5)' = e^{6x-x^2+5} \cdot (6 - 2x)$. Исследовав знак производной функции f (рис. 8.2), получаем, что функция f возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$, убывает на промежутке $[3; +\infty)$, $x_{\max} = 3$.

Рис. 8.2



2) Имеем:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Исследуем знак f' на $D(f) = (0; +\infty)$.

Имеем: $f'(x) > 0$ при $\ln x > -1$. Отсюда $x > \frac{1}{e}$. Аналогично находим, что $f'(x) < 0$ при $0 < x < \frac{1}{e}$.

Получаем, что функция f возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$, убывает на промежутке $\left(0; \frac{1}{e}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{e}$ (рис. 8.3).

3) Имеем:

$$f'(x) = 3\lg^2 x \cdot (\lg x)' - 3 \cdot \frac{1}{x\ln 10} = \frac{3\lg^2 x}{x\ln 10} - \frac{3}{x\ln 10} = \frac{3(\lg^2 x - 1)}{x\ln 10} =$$

$$= \frac{3(\lg x - 1)(\lg x + 1)}{x\ln 10}.$$

Тогда $f'(x) = 0$ при $\lg x = -1$ или $\lg x = 1$. Следовательно, данная функция имеет две критические точки: $x = \frac{1}{10}$ и $x = 10$. Исследовав знак производной функции f на $D(f) = (0; +\infty)$ (рис. 8.4), приходим к выводу, что функция f возрастает на промежутках $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ и $[10; +\infty)$, убывает на промежутке $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{10}$, $x_{\min} = 10$. ◄

Рис. 8.3

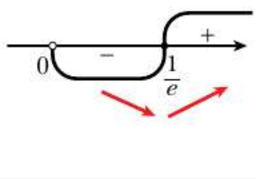
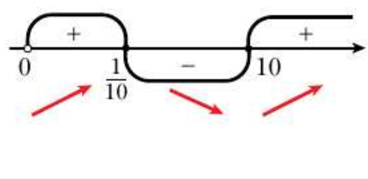


Рис. 8.4



1. Как обозначают и называют показательную функцию, производная которой равна самой функции?
2. Каким свойством обладает касательная к графику экспоненты в точке с абсциссой, равной 0?
3. Как называют логарифм, основание которого равно e?
4. По какой формуле находят производную: 1) показательной функции; 2) логарифмической функции; 3) степенной функции?

Упражнения

8.1. Найдите производную функции:

1) $y = x^{\sqrt{5}}$;
2) $y = 4e^x$;
3) $y = e^{5x}$;
4) $y = x^3e^x$;
5) $y = x^{\sqrt{3}}e^x$;
6) $y = e^x\sin x$;
7) $y = \frac{e^x}{x-2}$;
8) $y = e^x + e^{-x}$;
9) $y = 5^x$;
10) $y = 2^{x^2}$;
11) $y = 7^{2x-3}$;
12) $y = x \cdot 3^x$;
13) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$;
14) $y = 0{,}3^{\operatorname{tg} x}$.

8.2. Найдите производную функции:

1) $y = x^{\pi}$;
2) $y = e^{-2x}$;
3) $y = x^6e^x$;
4) $y = e^x\cos x$;
5) $y = \frac{x+1}{e^x}$;
6) $y = 6^x$;
7) $y = 3^{4x+1}$;
8) $y = (2x+1)^{\sqrt{10}}$;
9) $y = 10^{-x}$;
10) $y = \frac{5^x + 2}{5^x - 1}$;
11) $y = 0{,}7^{\operatorname{ctg} x}$.

8.3. Найдите производную функции:

1) $y = \log_9 x$;
2) $y = \ln 2x$;
3) $y = \lg(x^2 - 4)$;
4) $y = \ln^2 x$;
5) $y = \ln\sin x$;
6) $y = \frac{\ln x}{x^3}$;
7) $y = \log_{0,2}(2x^2 + x - 4)$;
8) $y = \ln(1 - 0{,}2x)$;
9) $y = x^5\ln x$.

8.4. Найдите производную функции:

1) $y = \lg x$;
2) $y = \ln(5x - 4)$;
3) $y = \ln^3 x$;
4) $y = \lg\cos x$;
5) $y = \frac{x^5}{\ln x}$;
6) $y = \log_2(x^2 + 6)$.

8.5. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = e^{3x} - 3x$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^{-2x}\cos 2x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = 3^{3x - 4x^2 + 2}$, $x_0 = 1$.

8.6. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = e^{5x} + e^{-4x}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = e^{-x}\operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = 4^{x^2-3x-4}$, $x_0 = -1$.

8.7. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \frac{1}{6}\ln(-12x)$, $x_0 = -\frac{1}{6}$;

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x^2$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \log_5(x^2 + 3x - 2)$, $x_0 = -4$;

4) $f(x) = \ln\sin\frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

8.8. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \ln(6x - 5)$, $x_0 = 3$;

2) $f(x) = 8\ln\frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

3) $f(x) = \lg(x^2 - 5x + 8)$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = \ln\cos\frac{x}{3}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

8.9. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{2x+1}$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = x - \ln x$, $x_0 = 3$.

8.10. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{1-x}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \log_5(x + 2)$, $x_0 = -1$.

8.11. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = e^x + \sin x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = x \cdot 2^x$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = 6^{3x+4}$, $x_0 = -1$;

5) $f(x) = 3x + \ln x$, $x_0 = 1$;

6) $f(x) = \ln(5 + 4x)$, $x_0 = -1$;

7) $f(x) = \log_3(2x + 1)$, $x_0 = 1$;

8) $f(x) = 2\ln(x - 2)$, $x_0 = 4$.

8.12. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{5x}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = 2e^x - \cos x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = 3^{2x-3}$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = 4x - \ln 4$, $x_0 = 1$;

5) $f(x) = \ln(3x - 5)$, $x_0 = 2$;

6) $f(x) = \log_2(x + 3)$, $x_0 = 1$.

8.13. Найдите уравнение горизонтальной касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$;

2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

8.14. Найдите уравнение горизонтальной касательной к графику функции $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

8.15. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^x$, если эта касательная параллельна прямой $y = ex - 6$;
2) $f(x) = e^{5x+2}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 5x + 7$;
3) $f(x) = e^{-2x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = -x$;
4) $f(x) = \ln(3x - 2)$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x - 2$.

8.16. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^{6-7x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 5 - 7x$;
2) $f(x) = e^x - e^{-x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 2x - 3$;
3) $f(x) = 6x - \ln x$, если эта касательная параллельна прямой $y = x$;
4) $f(x) = \ln(1 - x)$, если эта касательная параллельна прямой $y = 1 - x$.

8.17. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = e^x - x$;
2) $f(x) = xe^{2x}$;
3) $f(x) = (1 - x)e^{x+1}$;
4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$;
5) $f(x) = 4xe^{2-x}$;
6) $f(x) = e^{x^2}$;
7) $f(x) = e^{4x - x^2 + 1}$;
8) $f(x) = \dfrac{e^x}{x - 2}$;
9) $f(x) = \dfrac{4x}{e^x}$;
10) $f(x) = x^3 \ln x$;
11) $f(x) = \ln x - x$;
12) $f(x) = x^2 \lg x$;
13) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$;
14) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;
15) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
16) $f(x) = x^2 - \ln x^2$;
17) $f(x) = 2\ln^3 x - 3\ln^2 x$;
18) $f(x) = \lg^2 x - \lg x$.

8.18. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$;
2) $f(x) = e^{x^4 - 2x^2}$;
3) $f(x) = 5^{-x^3 + 3x + 1}$;
4) $f(x) = (4x - 1)e^{2x}$;
5) $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$;
6) $f(x) = \dfrac{x + 3}{e^x}$;
7) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$;
8) $f(x) = x \ln^2 x$;
9) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;
10) $f(x) = \ln x^2 + \dfrac{2}{x}$;
11) $f(x) = \ln^3 x - 12\ln x$;
12) $f(x) = \lg^4 x - 2\lg^2 x$.

8.19. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = e^x + x$ на промежутке $[-1; 1]$;

2) $f(x) = x^2e^{2x}$ на промежутке $[-2; 1]$;

3) $f(x) = 7^{x^2 - 2x}$ на промежутке $[0; 2]$;

4) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ на промежутке $[-1; 1]$.

8.20. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = (x - 1)e^{-x}$ на промежутке $[1; 3]$;

2) $f(x) = 5^{x^2 + 2x}$ на промежутке $[-2; 1]$.

8.21. Исследуйте функцию и постройте её график:

1) $f(x) = xe^x$;

2) $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$;

3) $f(x) = e^{-x^2}$;

4) $f(x) = x^2 - 2\ln x$;

5) $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

8.22. Исследуйте функцию и постройте её график:

1) $f(x) = \frac{x}{e^x}$;

2) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

3) $f(x) = \log_2(x^2 + x)$.

Готовимся к изучению новой темы

8.23. Подберите функцию, производная которой равна данной функции f:

1) $f(x) = 2x$;

2) $f(x) = 1$;

3) $f(x) = 4x^3$;

4) $f(x) = 2x + 1$;

5) $f(x) = x^2 - 1$.

Когда сделаны уроки

Примеры решения более сложных логарифмических уравнений и неравенств

Пример 1. Решите уравнение $\log_7(x + 8) = -x$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = \log_7(x + 8)$ и $g(x) = -x$. Функция f является возрастающей, функция g — убывающей. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Поскольку $f(-1) = g(-1)$, то $x = -1$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: -1. ◄

Пример 2. Решите неравенство $\log_3(x + 7) < 4 - x$.

Решение. Имеем: $\log_3(x + 7) + x - 4 < 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \log_3(x + 7) + x - 4$. Она возрастает на $D(f) = (-7; +\infty)$. Заметим, что $f(2) = 0$. Следовательно, при $x > 2$ получим, что $f(x) > f(2) = 0$, а при $-7 < x < 2$ получим, что $f(x) < f(2) = 0$.

Ответ: $(-7; 2)$. ◄

Пример 3. Решите уравнение $2^x + 5^x = 7^x$.

Решение. Очевидно, что $x = 1$ — корень данного уравнения. Покажем, что этот корень единственный.

Разделив обе части исходного уравнения на 7^x, получим:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Поскольку функции $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ и $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ убывающие, то функция f также является убывающей, а следовательно, каждое своё значение она принимает только один раз. Поэтому уравнение $f(x) = 1$ имеет единственный корень.

Ответ: 1. ◂

Пример 4. Решите неравенство $3^x + 4^x > 5^x$.

Решение. Имеем: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Заметим, что $f(2) = 1$. Поскольку функция f — убывающая, то при $x < 2$ выполняется неравенство $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ выполняется неравенство $f(x) < f(2)$. Следовательно, множеством решений неравенства $f(x) > f(2)$, то есть неравенства $f(x) > 1$, является промежуток $(-\infty; 2)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$. ◂

Пример 5. Решите уравнение $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$. (1)

Решение. Отметим, что переход от уравнения (1) к уравнению

$$2\log_3(x-2) + 2\log_3(x-4) = 0 \tag{2}$$

может привести к потере решений.

Действительно, областью определения исходного уравнения является множество $(2; 4) \cup (4; +\infty)$, а область определения уравнения (2) — множество $(4; +\infty)$. Следовательно, такой переход сужает область определения исходного уравнения на множество $(2; 4)$, которое может содержать корни уравнения (1).

На самом деле уравнение (1) равносильно такому уравнению:

$$2\log_3(x-2) + 2\log_3|x-4| = 0.$$

Отсюда $\log_3(x-2) + \log_3|x-4| = 0$.

Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2 < x < 4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(4-x)=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(x-4)=0.\end{cases}\end{array}\right.$$ Далее имеем: $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2 < x < 4,\\ \log_3((x-2)(4-x))=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4,\\ \log_3((x-2)(x-4))=0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2 < x < 4,\\ (x-2)(4-x)=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4,\\ (x-2)(x-4)=1;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2 < x < 4,\\ x^2-6x+9=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4,\\ x^2-6x+7=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2 < x < 4,\\ x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4,\\ \left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{2},\\ x=3+\sqrt{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=3+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $3;\ 3+\sqrt{2}$. ◄

<u>**Пример 6.**</u> Решите уравнение $\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}\log_3(x-2)=0$.

Решение. Ошибочно считать, что уравнение вида $f(x)\cdot g(x)=0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}f(x)=0,\\ g(x)=0.\end{array}\right.$ При таком переходе существует опасность получить в ответе посторонние корни. Например, нет гарантии, что все корни уравнения $f(x)=0$ принадлежат области определения функции g.

На самом деле уравнение $f(x)\cdot g(x)=0$ равносильно системе

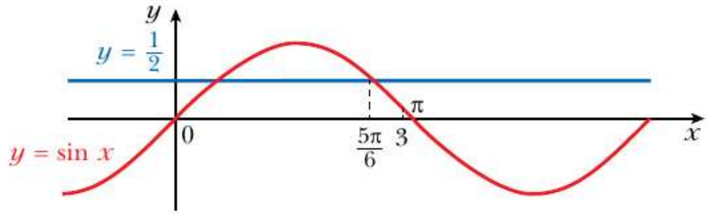
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(x)=0,\\ g(x)=0,\end{array}\right.\\ x\in D(f),\\ x\in D(g).\end{cases}$$

Воспользовавшись этим, запишем систему, равносильную уравнению $\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}\log_3(x-2)=0$:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_3(x-2)=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2},\end{array}\right.\\ x>2,\\ \sin x\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Единственным корнем первого уравнения совокупности является число 3. Поскольку $\sin 3 < \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 8.5), то число 3 не является корнем исходного уравнения.

Рис. 8.5



Все числа вида $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, являются корнями второго уравнения совокупности. Среди них следует выбрать только те, которые удовлетворяют условию $x > 2$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $n \in \boldsymbol{N}$.

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{N}$. ◄

<u>**Пример 7.**</u> Решите неравенство $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$.

Решение. Перепишем данное неравенство так: $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 0, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} < 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3x - 1 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 1. \end{array}\right. \end{cases}$

Получаем $\frac{1}{3} < x < 1$.

2) $\begin{cases} x > 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 3x + 2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 1 < x < 2; \end{cases}$ $1 < x < 2$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\ 1\right) \cup (1;\ 2)$. ◄

Упражнения

1. Решите уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2. Решите уравнение:
1) $2^x = 3 - x$; 2) $3^x + 4^x = 5^x$.

3. Решите неравенство $x^2 \cdot 3^x + 9 < x^2 + 3^{x+2}$.

4. Решите уравнение $|3^x - 1| + |3^x - 9| = 8$.

5. Решите неравенство:
1) $5^x > 6 - x$; 2) $5^x + 12^x < 13^x$.

6. Решите неравенство $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$.

7. Решите уравнение $\log_2 (x-5)^2 - 2\log_2 (x+2) = 2$.

8. Решите уравнение:
1) $\log_7 (x+8) = -x$;
2) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.

9. Решите уравнение $\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$.

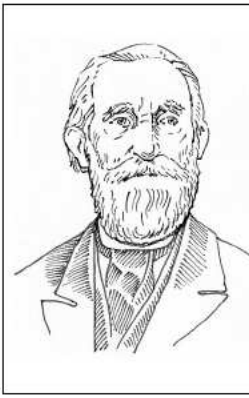
10. Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}\log_{\frac{1}{2}}(3 - x) = 0$.

11. Решите неравенство:
1) $\log_{x-2}(2x-9) < 0$; 2) $\log_{x+1}(5-x) > 1$.

12. Решите неравенство $\sqrt{-x^2 + 7x - 10}\log_2(x-3) \leqslant 0$.

Когда сделаны уроки

Русский Архимед


Пафнутий Львович Чебышёв

Так называли современники одного из величайших учёных — русского математика и механика, основоположника петербургской математической школы Пафнутия Львовича Чебышёва (1821–1894).

За свою жизнь П. Л. Чебышёв совершил столько важнейших математических открытий, что практически любую главу учебника можно было бы проиллюстрировать одним из достижений П. Л. Чебышёва. Ведь можно рассказать о фундаментальном вкладе Чебышёва в теорию вероятностей, где Пафнутий Львович доказал закон больших чисел, а можно — о созданной им теории наилучшего приближения функций многочленами. Мы решили рассказать о проблеме, которая более двадцати веков волнует умы учёных, и роли П. Л. Чебышёва в её решении. Примечательно то, что в этой истории важное место занимает функция $y = \ln x$, с которой вы ознакомились в этой главе.

Простые числа составляют одну из главных загадок математики. Напомним, что простым называют натуральное число, имеющее среди натуральных чисел всего два делителя. Например, простыми числами являются:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13.$$

Простые числа расположены в ряду натуральных чисел чрезвычайно неравномерно. Например, среди следующего набора последовательных натуральных чисел

$$n!+2,\ \ n!+3,\ \ n!+4,\ \ ...,\ \ n!+n, \text{ где } n \in \boldsymbol{N} \text{ и } n > 1, \qquad (1)$$

нет ни одного простого (подумайте почему). Другими словами, в последовательности натуральных чисел есть сколь угодно длинные отрезки, не содержащие ни одного простого числа. Вопрос о том, как простые числа распределены среди чисел натурального ряда, является одной из самых сложных и интересных задач математики. Эту задачу называют *проблемой распределения простых чисел*.

Главным объектом исследования проблемы распределения простых чисел является ***функция распределения простых чисел*** $y = \pi(n)$. Величина $\pi(n)$ показывает количество простых чисел на отрезке от 1 до n. Например, $\pi(6) = 3$, поскольку в диапазоне от 1 до 6 находится три простых числа: 2, 3 и 5. В следующей таблице представлены некоторые значения функции $\pi(n)$.

Значение n	1	2	3	4	5	6	7
Значение $\pi(n)$	0	1	2	2	3	3	4

С помощью функции $y = \pi(n)$ удобно записывать различные утверждения о простых числах. Например, сформулированное выше утверждение о том, что среди набора чисел (1) нет ни одного простого, можно записать так:

$$\pi(n!+n) = \pi(n!+2).$$

С давних времён математики пытались найти удобную формулу для вычисления значений функции $y = \pi(n)$ или хотя бы описать её основные свойства.

Около 300 года до н. э. древнегреческий математик Евклид сделал первый шаг к разгадке тайны распределения простых чисел. Он доказал, что простых чисел бесконечно много, и тем самым установил важное свойство функции $y = \pi(n)$ – её неограниченное возрастание при $n \to \infty$. Но далее, на протяжении более двух тысяч лет, утверждение Евклида оставалось практически единственным строго обоснованным фактом о свойствах функции $y = \pi(n)$. В XVIII–XIX веках выдающиеся математики А. М. Лежандр, К. Ф. Гаусс, Л. Эйлер высказали ряд интересных гипотез о поведении функции $y = \pi(n)$, но их полные доказательства представить не смогли. Было подмечено, что поведение этой функции связано с логарифмической функцией $y = \ln x$, а именно: при больших значениях n выполняется приближённое равенство

$$\pi(n) \oplus \frac{n}{\ln n}. \qquad (2)$$

Например, если взять $n = 10^{10}$, то $\ln n = \ln 10^{10} \approx 23$ и $\frac{n}{\ln n} \approx 4{,}34 \cdot 10^8$.

Это означает, что среди чисел от 1 до $n = 10^{10}$ в среднем только одно из 23 чисел является простым. В наши дни с помощью компьютера установлено, что количество простых чисел, расположенных в натуральном ряду между числами 1 и 10^{10}, равно $455\,052\,512 \approx 4{,}55 \cdot 10^8$.

П. Л. Чебышёву удалось найти первые корректные математические доказательства этих закономерностей, а также указать границы их применения. Например, он доказал, что для функции $y = \pi(n)$ выполняются неравенства

$$0{,}92\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 1{,}11\frac{n}{\ln n},$$

оценивающие погрешность приближённой формулы (2).

По мнению многих специалистов, П. Л. Чебышёв был первым, кто за две тысячи лет после Евклида пошёл верным путём и достиг важных результатов в решении проблемы распределения простых чисел.

Итоги главы 1

Показательная функция

✓ **Функцию $f(x) = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показательной функцией.**

Логарифм

✓ **Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.**

Основное логарифмическое тождество

✓ $a^{\log_a b} = b$

Основные свойства логарифмов

Если $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то выполняются равенства:

✓ 1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

✓ 2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

✓ 3) $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$ **для любого** $\beta \in \boldsymbol{R}$;

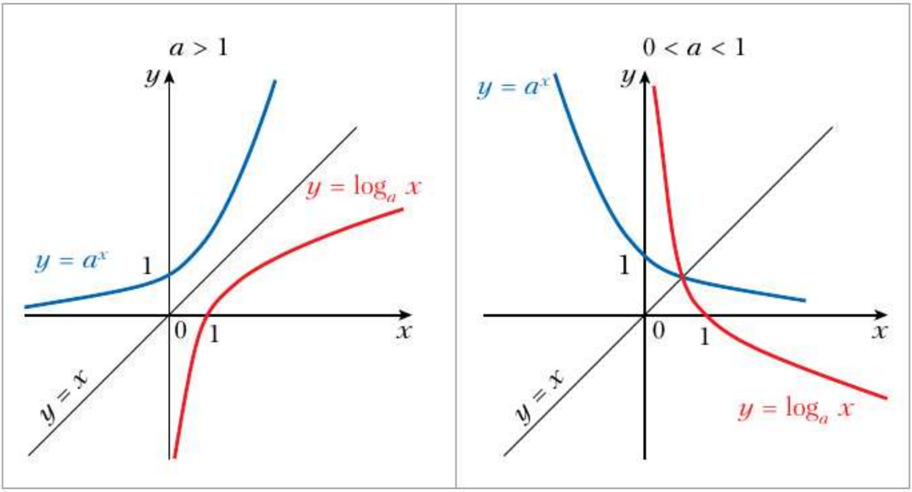
✓ 4) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, **где** $b > 0$, $b \neq 1$

✓ **Свойства показательной и логарифмической функций**

	Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$(0; +\infty)$
Область значений	$(0; +\infty)$	$\boldsymbol{R}$
Нули функции	—	$x = 1$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на $\boldsymbol{R}$	Если $a > 1$, то $y < 0$ на $(0; 1)$, $y > 0$ на $(1; +\infty)$; если $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1; +\infty)$, $y > 0$ на $(0; 1)$

	Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
Возрастание/убывание	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная
Дифференцируемость	Дифференцируемая	Дифференцируемая
Асимптоты	Если $a > 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; если $0 < a < 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$	Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота, когда x стремится к нулю справа

✓ Графики показательной и логарифмической функций



Решение показательных уравнений и неравенств

✓ Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

✓ Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$; если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Решение логарифмических уравнений и неравенств

✓ Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, равносильно любой из систем $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

✓ Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Производные показательной и логарифмической функций

✓ $(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x \ln a$

✓ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Производная степенной функции

✓ $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$

Глава 2. Интеграл и его применение

В этой главе вы ознакомитесь с операцией, обратной дифференцированию, изучите свойства этой операции. Ознакомитесь с понятием «определённый интеграл» и выясните его геометрический смысл.

Вы научитесь находить закон движения материальной точки по известному закону изменения скорости, расширите класс фигур, площади которых сможете находить.

§ 9. Первообразная

Вы умеете по заданной функции находить её производную, знаете, что производная применяется во многих областях знаний. В частности, умея дифференцировать, по данному закону $y = s(t)$ движения материальной точки по координатной прямой можно найти закон $y = v(t)$ изменения её скорости, а именно:

$$v(t) = s'(t).$$

Нередко в механике приходится решать обратную задачу: находить закон движения по известному закону изменения скорости.

Например, из курса физики вам известен такой факт: если скорость тела изменяется по закону $v(t) = gt$ и $s(0) = 0$, то закон движения задаётся формулой $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Вы знаете, что нахождение производной заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию, то есть нахождение функции по её производной, называют **интегрированием**.

Определение

Функцию F называют первообразной функцией (или коротко — первообразной) функции f на промежутке I, если для всех $x \in I$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $F(x) = x^2$ является первообразной функции $f(x) = 2x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, поскольку для любого x из этого промежутка выполняется равенство $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, связанных с первообразной функции, промежуток I не указывают. В таких случаях считают, что $I = (-\infty; +\infty)$. Например, функция $F(x) = \cos x$ является первообразной функции $f(x) = -\sin x$. Действительно, равенство $(\cos x)' = -\sin x$ выполняется на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Рассмотрим ещё один пример. Функция $F(x) = \sqrt{x}$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; +\infty)$, поскольку на этом промежутке выполняется равенство $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Однако на промежутке $[0; +\infty)$ функция $F(x) = \sqrt{x}$ не является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, так как в точке $x_0 = 0$ не выполняется равенство $F'(x_0) = f(x_0)$.

Рассмотрим функции $F_1(x) = x^2 + 1$ и $F_2(x) = x^2 - \sqrt{2}$. Каждая из них имеет одну и ту же производную $f(x) = 2x$. Поэтому обе функции F_1 и F_2 являются первообразными функции f. Понятно, что каждая из функций вида $F(x) = x^2 + C$, где C — любое число, является первообразной функции $f(x) = 2x$. Следовательно, задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений.

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все её первообразные на заданном промежутке.

Как связаны между собой все первообразные данной функции, указывает следующая теорема.

Теорема 9.1
(основное свойство первообразной)

Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и C — любое число, то функция

$$y = F(x) + C$$

также является первообразной функции f на промежутке I.

Любую первообразную функции f на промежутке I можно представить в виде $y = F(x) + C$, где C — некоторое число.

Доказательство

Поскольку функция F — первообразная функции f на промежутке I, то для всех $x \in I$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Следовательно, функция $y = F(x) + C$ является первообразной функции f на промежутке I при любом значении C.

Пусть функция G – одна из первообразных функции f на промежутке I. Тогда $G'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$. Имеем:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно признаку постоянства функции получаем, что функция $y = G(x) - F(x)$ является константой на промежутке I, то есть $G(x) - F(x) = C$, где C – некоторое число.

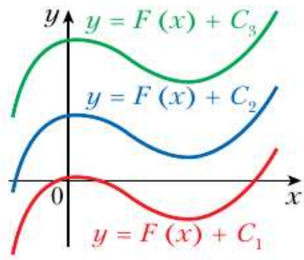
Отсюда $G(x) = F(x) + C$.

Таким образом, любую первообразную функции f на промежутке I можно представить в виде $y = F(x) + C$, где C – некоторое число. ◄

Если функция F является первообразной функции f на промежутке I, то запись $F(x) + C$, где C – любое число, называют **общим видом первообразных** функции f на промежутке I.

Из основного свойства первообразной следует, что графики любых двух первообразных данной функции можно получить друг из друга параллельным переносом вдоль оси ординат (рис. 9.1).

Рис. 9.1



Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$ на промежутке I называют её **неопределённым интегралом** и обозначают

$$\int f(x)\,dx$$

(читают: «интеграл эф от икс де икс»).

Например, функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Из теоремы 9.1 следует, что любую первообразную функции f на промежутке $(-\infty; +\infty)$ можно представить в виде $y = x^3 + C$, где C – некоторое число. Пишут:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C,$$

где C – любое число.

<u>**Пример 1.**</u> Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = x^5$.

Решение. Поскольку $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$, то одной из первообразных функции $f(x) = x^5$ является функция $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Тогда согласно теореме 9.1 запись $\frac{x^6}{6} + C$, где C – любое число, является общим видом первообразных данной функции.

Ответ: $\frac{x^6}{6} + C$, где C – любое число. ◄

Из решения примера 1 следует, что

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C, \text{ где } C - \text{любое число.}$$

Пример 2. Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Решение. На промежутке $(0; +\infty)$ имеет место равенство $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; на промежутке $(-\infty; 0)$ имеют место равенства $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$.

Следовательно, функция $y = \ln x$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$, а функция $y = \ln(-x)$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

Поскольку $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, \text{ если } x \in (0; +\infty), \\ \ln(-x), \text{ если } x \in (-\infty; 0), \end{cases}$

то на любом промежутке, не содержащем точку 0, запись

$$\ln|x| + C, \text{ где } C - \text{любое число,}$$

является общим видом первообразных функции $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ответ: $\ln|x| + C$, где C – любое число. ◄

Пример 3. Для функции $f(x) = 2\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{5\pi}{6}; 3\right)$.

Решение. Поскольку $(2\sin x)' = 2\cos x$, то функция $y = 2\sin x$ является одной из первообразных функции $f(x) = 2\cos x$. Следовательно, искомая первообразная имеет вид $F(x) = 2\sin x + C$, где C – некоторое число. Найдём это число.

Из условия следует, что $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3$. Тогда $2\sin\frac{5\pi}{6} + C = 3$. Отсюда $C = 2$.

Таким образом, искомая первообразная имеет вид $F(x) = 2\sin x + 2$.

Ответ: $F(x) = 2\sin x + 2$. ◄

Первообразные функций, которые используются чаще всего, приведены в таблице.

Функция f	Первообразная функции f
k (постоянная)	kx
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
e^x	e^x
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

Обратим внимание, что в таблице указаны первообразные функций f на таких промежутках I, что $I \subset D(f)$.

Правильность заполнения этой таблицы проверьте самостоятельно с помощью операции дифференцирования.

Функция $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \neq -1$, является первообразной функции $f(x) = x^{\alpha}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Пользуясь этим, найдём, например, первообразную функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку на этом промежутке $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, то функция $F(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$ является первообразной функции f на промежутке $(0; +\infty)$. Учитывая равенства $\dfrac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \dfrac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$, можно записать: $F(x) = \dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

1. Какую функцию называют первообразной данной функции на заданном промежутке?
2. Сформулируйте основное свойство первообразной.
3. Какую запись называют общим видом первообразных функции f на заданном промежутке?
4. Что называют неопределённым интегралом функции f на промежутке I?

Упражнения

9.1. Определите, является ли функция F первообразной функции f:
1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;
2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ на промежутке $(0; +\infty)$;
3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;
4) $F(x) = \cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$;
5) $F(x) = \sqrt{2x+1}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ на промежутке $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$;
6) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

9.2. Докажите, что функция F является первообразной функции f на промежутке I:
1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;
2) $F(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $f(x) = -\dfrac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;
3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}$, $f(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$;
4) $F(x) = 3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3} + 6$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{3}}$, $I = \left(-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

9.3. Является ли функция $F(x) = \dfrac{1}{x^2}$ первообразной функции $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ на промежутке:
1) $(0; +\infty)$;
2) $(-2; 2)$;
3) $(-\infty; 0]$;
4) $(-6; 0)$?

9.4. Найдите общий вид первообразных функции:
1) $f(x) = 5$;
2) $f(x) = x$;
3) $f(x) = x^6$;
4) $f(x) = 2^x$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$ на промежутке $(-\infty; 0)$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$ на промежутке $[1; +\infty)$;
7) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ на промежутке $(-\infty; -3)$;
8) $f(x) = x^{-5}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

9.5. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = 0$;
2) $f(x) = x^8$;
3) $f(x) = \frac{1}{3^x}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^{20}}$ на промежутке $(0; +\infty)$;
5) $f(x) = \sqrt[7]{x}$ на промежутке $(4; +\infty)$;
6) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ на промежутке $[0{,}5; +\infty)$.

9.6. Проверьте, что:

1) $\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x + C$, где C – любое число;

2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \sqrt{x^2+4} + C$, где C – любое число.

9.7. Проверьте, что функция $F(x) = \frac{x-2}{3x-1}$ является первообразной функции $f(x) = \frac{5}{(3x-1)^2}$ на каждом из промежутков $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, и запишите общий вид первообразных функции f на каждом из указанных промежутков.

9.8. Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f(x) = x^2$, $A(-1; 3)$;
2) $f(x) = \sin x$, $F(\pi; -1)$;
3) $f(x) = e^x$, $C(0; -6)$.

9.9. Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f(x) = x^3$, $M\left(1; \frac{5}{4}\right)$;
2) $f(x) = \cos x$, $N\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{2}\right)$;
3) $f(x) = 3^x$, $K\left(2; \frac{9}{\ln 3}\right)$.

9.10. Для функции f найдите на промежутке I первообразную F, которая принимает данное значение в указанной точке:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$;

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (-\infty; 0)$, $F(-e^3) = 7$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$.

9.11. Для функции f найдите на промежутке I первообразную F, которая принимает данное значение в указанной точке:

1) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $I = (0; \pi)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

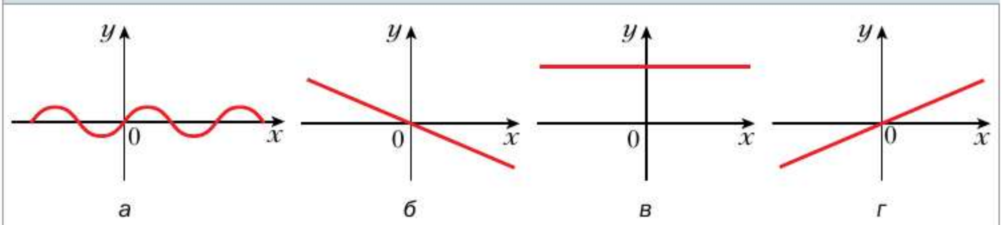
2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $F(16) = 10$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{e}\right) = -2$;

4) $f(x) = 2^x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(5) = 1$.

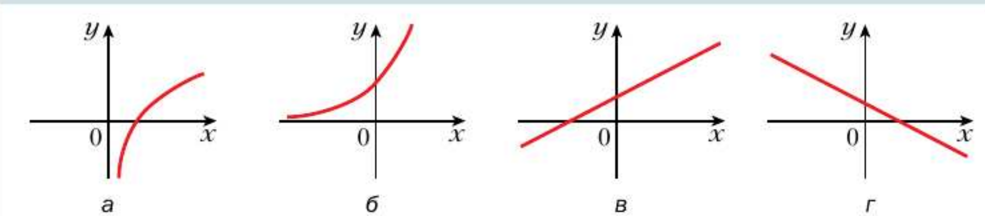
9.12. Укажите на рисунке 9.2 график, который может быть графиком первообразной функции $f(x) = \cos 3$.

Рис. 9.2



9.13. Укажите на рисунке 9.3 график, который может быть графиком первообразной функции $f(x) = \ln 2$.

Рис. 9.3



9.14. Для функции $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$ найдите какие-нибудь две первообразные, расстояние между соответствующими точками которых (то есть точками с равными абсциссами) равно 2.

9.15. Докажите, что функции $F_1(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ и $F_2(x) = -\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ являются первообразными функции $f(x) = \cos 2x$. При каком значении C верно равенство $F_1(x) = F_2(x) + C$?

9.16. Докажите, что функции $F_1(x) = \sin^2 x$ и $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ являются первообразными функции $f(x) = \sin 2x$. При каком значении C верно равенство $F_2(x) = F_1(x) + C$?

Упражнения для повторения

9.17. Решите уравнение $\frac{3x}{x^3 - 1} - \frac{5}{4x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{2(1 - x)}$.

9.18. Решите неравенство:

1) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$; 2) $|x^2 + 4x + 3| > x + 3$.

9.19. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{|x - 1|(3x - 6)} + \frac{3}{x^2 + 4x - 21}.$$

§ 10. Правила нахождения первообразной

При нахождении производных функций вы пользовались не только формулами, записанными в таблице (см. второй форзац), но и правилами дифференцирования. В этом параграфе мы рассмотрим три правила нахождения первообразных, то есть три правила интегрирования.

Теорема 10.1

Если функции F и G являются соответственно первообразными функций f и g на промежутке I, то на этом промежутке функция $y = F(x) + G(x)$ является первообразной функции $y = f(x) + g(x)$.

Доказательство

Из условия следует, что для любого $x \in I$ выполняются равенства $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда для любого x из промежутка I имеем:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x). \blacktriangleleft$$

Из теоремы 10.1 следует, что:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C,$$

где C — любое число.

Аналогично можно доказать, что

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C,$$

где C — любое число.

Теорема 10.2

Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и k — некоторое число, то на этом промежутке функция $y = kF(x)$ является первообразной функции $y = kf(x)$.

Докажите теорему 10.2 самостоятельно.

Теперь можно записать:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C,$$

где C – любое число.

Теорема 10.3

Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и k — некоторое число, отличное от нуля, то на соответствующем промежутке функция $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ является первообразной функции $y = f(kx + b)$.

Доказательство

Используя правило нахождения производной сложной функции, запишем:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b). \blacktriangleleft$$

Теперь можно записать:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,$$

где C – любое число.

__Пример 1.__ Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Решение. Напомним, что функция $y = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ является первообразной функции $y = x^\alpha$ на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку на данном промежутке выполняется равенство $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то функция $y = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$, то есть функция $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, является первообразной для функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Так как $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, то функция $y = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$, то есть функция $y = -\frac{1}{x}$, является первообразной функции $y = \frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Тогда по теореме 10.2 функция $y = -\frac{2}{x}$ является первообразной функции $y = \frac{2}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Воспользовавшись теоремой 10.1, получаем, что функция $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - -\frac{2}{x}$ является первообразной функции $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$ на заданном в условии промежутке. Тогда запись $\frac{2}{3}\sqrt{x^2} - \frac{2}{x} + C$, где C – любое число, является общим видом первообразных функции f на промежутке $(0; +\infty)$.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C$, где C – любое число. ◀

Решение примера 1 можно записать и так:

$$\int\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int\sqrt{x}\,dx + \int\frac{2}{x^2}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 2\int x^{-2}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C, \text{ где } C \text{ – любое число.}$$

<u>**Пример 2.**</u> Найдите одну из первообразных функции:

1) $y = \cos(2x+1)$; 2) $y = \frac{1}{(5x-3)^3}$ на промежутке $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Решение. 1) Поскольку функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, то по теореме 10.3 функция $y = \frac{1}{k}F(kx+b)$, то есть функция $y = \frac{1}{2}\sin(2x+1)$, является первообразной функции $y = \cos(2x+1)$.

2) Поскольку $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, то первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x^3}$ является функция $F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$, то есть $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$. Тогда первообразная функции $y = \frac{1}{(5x-3)^3}$ имеет вид $y = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2(5x-3)^2}\right)$, то есть $y = -\frac{1}{10(5x-3)^2}$.

Ответ: 1) $y = \cos(2x+1)$; 2) $y = -\frac{1}{10(5x-3)^2}$. ◀

Пример 3. Для функции $f(x) = \frac{1}{4x-3}$ найдите первообразную на промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$, график которой проходит через точку $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Решение. Согласно теореме 10.3 запись $\frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$, где C – любое число, является общим видом первообразных функции f на данном промежутке.

На промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ искомая первообразная имеет вид $F(x) = \frac{1}{4}\ln(3-4x) + C$, где C – некоторое число. Из условия следует, что $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Тогда $\frac{1}{4}\ln\left(3 - 4\cdot\frac{1}{2}\right) + C = 2$, отсюда $C = 2$.

Следовательно, $F(x) = \frac{1}{4}\ln(3-4x) + 2$.

Ответ: $F(x) = \frac{1}{4}\ln(3-4x) + 2$. ◄

Пример 4. Скорость движения материальной точки по координатной прямой изменяется по закону $v(t) = \frac{3}{\sqrt{2t+1}}$. Найдите закон движения $y = s(t)$, если $s(0) = 3$ (перемещение измеряется в метрах, время – в секундах).

Решение. Функция $y = s(t)$ является первообразной функции $y = v(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Найдя первообразную функции $y = \frac{3}{\sqrt{2t+1}}$, можно записать:

$$s(t) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2t+1} + C, \text{ то есть } s(t) = 3\sqrt{2t+1} + C,$$

где C – некоторое число. Найдём C из условия $s(0) = 3$. Имеем:

$$3\sqrt{2\cdot 0+1} + C = 3, \text{ отсюда } C = 0.$$

Тогда искомый закон движения задаётся формулой $s(t) = 3\sqrt{2t+1}$. ◄

Вы знаете, как найти производные произведения функций, частного функций и производную сложной функции. Возможно, после ознакомления с материалом этого параграфа у вас возник вопрос: как найти первообразные функций $y = f(x)g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ или $y = f(g(x))$, если известны первообразные функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$? К сожалению, общих правил нахождения первообразных таких функций не существует.

? Сформулируйте правила нахождения первообразной.

Упражнения

10.1. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = 4 - 2x$;
2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$;
3) $f(x) = 5\sin x + \cos x$;
4) $f(x) = x^3(2 - x^2)$;
5) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$;
6) $f(x) = \dfrac{6}{x} - x^3$ на промежутке $(-\infty; 0)$;
7) $f(x) = \dfrac{9}{\sin^2 x} + \dfrac{x^4}{4}$ на промежутке $(0; \pi)$;
8) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ на промежутке $(0; +\infty)$;
9) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$ на промежутке $(-\infty; 0)$;
10) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{6}{x^5}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

10.2. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = x + 3$;
2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;
3) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;
5) $f(x) = \dfrac{9}{\cos^2 x} - 3\sin x$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;
6) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \dfrac{3}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$;
7) $f(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$;
8) $f(x) = \dfrac{9}{x^{10}} + \dfrac{8}{x^9}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

10.3. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = \sin 5x$;
2) $f(x) = 2\cos \dfrac{x}{2}$;
3) $f(x) = \left(6x + \dfrac{1}{2}\right)^3$;
4) $f(x) = \left(\dfrac{x}{7} - 2\right)^4$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$;
6) $f(x) = 7^{3x}$;
7) $f(x) = -\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;
8) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right)$;

9) $f(x) = \frac{8}{\sin^2 4x}$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$;

10) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ на промежутке $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

11) $f(x) = \sqrt{x+4}$ на промежутке $[-4; +\infty)$;

12) $f(x) = \frac{6}{3x+2}$ на промежутке $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

13) $f(x) = \frac{4}{(4x-3)^2}$ на промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$;

14) $f(x) = \sqrt{1-\frac{x}{2}}$ на промежутке $(-\infty; 2]$.

10.4. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = \sin\frac{x}{4}$;

2) $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;

3) $f(x) = e^{5-\frac{x}{2}}$;

4) $f(x) = \frac{1}{2^{3x+5}}$;

5) $f(x) = (2x-3)^5$;

6) $f(x) = \frac{1}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right)$;

7) $f(x) = \frac{3}{(3x-1)^3}$ на промежутке $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$;

8) $f(x) = \frac{1}{3-x}$ на промежутке $(-\infty; 3)$;

9) $f(x) = \frac{1}{\sin^2\frac{x}{5}}$ на промежутке $(0; 5\pi)$;

10) $f(x) = \sqrt[4]{4x+7}$ на промежутке $\left(-\frac{7}{4}; +\infty\right)$.

10.5. Для функции f на промежутке I найдите первообразную F, удовлетворяющую данному условию:

1) $f(x) = 1 - 2x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(3) = 2$;

2) $f(x) = 3x^2 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(1) = 4$;

3) $f(x) = \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(\pi) = 7$;

4) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$;

5) $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{4}\right) = 1$;

6) $f(x) = \frac{7}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $I = (4; +\infty)$, $F(5) = 6$;

7) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6x+1}}$, $I = \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$, $F(4) = 7$;

8) $f(x) = e^{3x}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(0) = 1$;

9) $f(x) = (2 - 3x)^2$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(1) = 0$;

10) $f(x) = \frac{4}{\cos^2\left(6x - \frac{\pi}{6}\right)}$, $I = \left(-\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{9}\right)$, $F(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

10.6. Для функции f на промежутке I найдите первообразную F, график которой проходит через данную точку:

1) $f(x) = 3 - 6x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $A(-1; 0)$;

2) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, $I = (-\infty; +\infty)$, $B(1; 5)$;

3) $f(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $C(4; 10)$;

4) $f(x) = 2\sin 3x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $D\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$;

5) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{2} - 2}}$, $I = (4; +\infty)$, $E(6; 12)$;

6) $f(x) = e^{2x+1}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$;

7) $f(x) = \frac{1}{4x - 3e^2}$, $I = \left(\frac{3e^2}{4}; +\infty\right)$, $K(e^2; 6)$;

8) $f(x) = \frac{1}{\sin^2\frac{x}{8}}$, $I = (0; 8\pi)$, $N(2\pi; -3)$.

10.7. Для функции $f(x) = 4x^3 + 4x$ найдите первообразную F, один из нулей которой равен -1. Найдите остальные нули этой первообразной.

10.8. Для функции $f(x) = x^2 - 12$ найдите первообразную F, один из нулей которой равен 3.

10.9. Функции F_1 и F_2 являются первообразными функции f. График функции F_1 проходит через точку A, а функции F_2 – через точку B. График какой из функций, F_1 или F_2, расположен выше, если:

1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$, $A(1; 2)$, $B(0; 5)$;

2) $f(x) = (2x - 1)^2$, $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$?

10.10. Функции F_1 и F_2 являются первообразными функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-1}}$ на промежутке $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$. График функции F_1 проходит через точку $M(1; 9)$, а функции F_2 – через точку $N(10; 8)$. График какой из функций, F_1 или F_2, расположен выше?

10.11. Скорость материальной точки, которая движется по координатной прямой, изменяется по закону $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишите формулу зависимости её координаты от времени, если в начальный момент времени $t = 0$ с точка находилась в начале координат (скорость движения измеряется в метрах в секунду).

10.12. Тело движется по координатной прямой со скоростью, которая определяется в любой момент времени t по формуле $v(t) = 6t^2 + 1$. Найдите формулу, которая выражает зависимость координаты точки от времени, если в момент времени $t = 3$ с тело находилось на расстоянии 10 м от начала координат (скорость движения измеряется в метрах в секунду).

10.13. Задайте формулой функцию, определённую на промежутке $(-\infty; +\infty)$, график которой проходит через точку $A(-1; 6)$, а угловой коэффициент касательной, проведённой к этому графику в точке с абсциссой x, равен $6x^2 - 5x^4$.

10.14. Задайте формулой функцию, определённую на промежутке $(0; +\infty)$, график которой проходит через точку $B(4; -5)$, а угловой коэффициент касательной, проведённой к этому графику в точке с абсциссой x, равен $\frac{3}{\sqrt{x}} + 1$.

10.15. Найдите:

1) $\int \sin^2 x\,dx$;

2) $\int \sin 5x \cos 3x\,dx$;

3) $\int \sin\frac{7x}{3}\sin\frac{5x}{3}\,dx$.

10.16. Найдите:

1) $\int \cos^2 2x\,dx$; 2) $\int \cos x \cos 8x\,dx$.

10.17. Для функции $f(x) = 2x^2 + 3x$ найдите такую первообразную, чтобы прямая $y = 5x - 2$ являлась касательной к её графику.

10.18. Для функции $f(x) = x^2 - 4$ найдите такую первообразную, чтобы прямая $y = -3$ являлась касательной к её графику.

10.19. Для функции $f(x) = -2x + 5$ найдите такую первообразную, чтобы её график имел только одну общую точку с прямой $y = 2$.

10.20. Для функции $f(x) = x + 1$ найдите такую первообразную, чтобы её график имел только одну общую точку с прямой $y = -4$.

10.21. Ученик предлагает искать первообразную функции $y = \cos x^2$ так:

1) делает замену $x^2 = t$ и получает функцию $y = \cos t$;

2) далее ищет первообразную функции $y = \cos t$ и получает $y = \sin t$;

3) потом вместо t подставляет значение $t = x^2$ и делает вывод, что каждая первообразная имеет вид $y = \sin x^2 + C$, где C – некоторое число.

В чём состоит ошибка этого ученика?

Упражнения для повторения

10.22. Упростите выражение

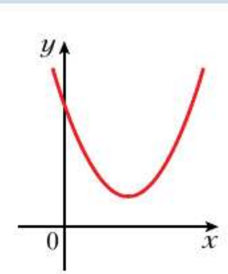
$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right) - \frac{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}}{2}.$$

10.23. Исследуйте на чётность функцию $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x+3} - \dfrac{x^3 + 2x^2}{x-3}$.

10.24. Найдите область значений функции $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

10.25. На рисунке 10.1 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

Рис. 10.1

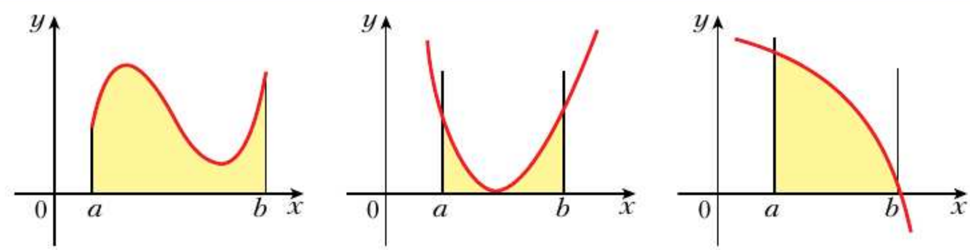


§ 11. Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл

Рассмотрим функцию f, которая непрерывна на промежутке $[a; b]$ и принимает на нём неотрицательные значения. Фигуру, ограниченную графиком функции f и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, называют **криволинейной трапецией**.

На рисунке 11.1 приведены примеры криволинейных трапеций (они выделены жёлтым цветом).

Рис. 11.1



а б в

Рассмотрим теорему, которая позволяет вычислять площади криволинейных трапеций.

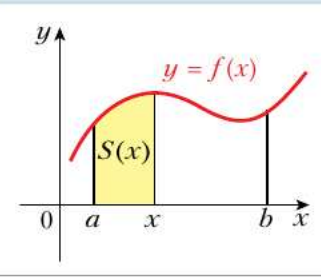
Теорема 11.1

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), можно вычислить по формуле

$$S = F(b) - F(a),$$

где F — любая первообразная функции f на промежутке $[a; b]$.

Рис. 11.2



Доказательство

Рассмотрим функцию $y = S(x)$, где $x \in [a; b]$, которая определена таким правилом:

если $x = a$, то $S(a) = 0$; если $x \in (a; b]$, то $S(x)$ – это площадь криволинейной трапеции, показанной на рисунке 11.2 жёлтым цветом.

Докажем, что $S'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a; b]$.

Пусть x_0 – произвольная точка промежутка $[a; b]$ и Δx – приращение аргумента в точке x_0. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\Delta x > 0$ (случай, когда $\Delta x < 0$, рассматривают аналогично).

Имеем: $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$.

Получаем, что ΔS – это площадь криволинейной трапеции, показанной на рисунке 11.3 жёлтым цветом.

Рис. 11.3

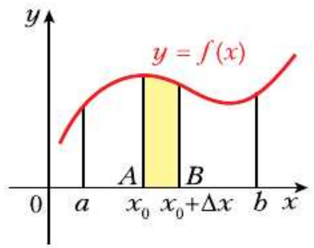
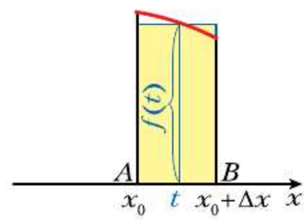


Рис. 11.4



На отрезке AB как на стороне построим прямоугольник, площадь которого равна ΔS (рис. 11.4). Длины сторон этого прямоугольника равны Δx и $f(t)$, где t – некоторая точка промежутка $[x_0; x_0 + \Delta x]$. Тогда $\Delta S = f(t) \cdot \Delta x$. Отсюда $\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$.

Если $\Delta x \to 0$, то $t \to x_0$. Поскольку функция f непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$. Отсюда если $\Delta x \to 0$, то $f(t) \to f(x_0)$. Имеем:

$$S'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(t) = f(x_0).$$

Поскольку x_0 – произвольная точка области определения функции $y = S(x)$, то для любого $x \in [a; b]$ выполняется равенство $S'(x) = f(x)$.

Получили, что функция $y = S(x)$ является одной из первообразных функции f на промежутке $[a; b]$.

Пусть F – некоторая первообразная функции f на промежутке $[a; b]$. Тогда по основному свойству первообразной можно записать:

$$F(x) = S(x) + C,$$

где C – некоторое число.

Имеем: $F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) = S(b) - S(a) = S(b)$.

По определению функции $y = S(x)$ искомая площадь S криволинейной трапеции равна $S(b)$. Следовательно,

$$S = F(b) - F(a). ◄$$

Пример 1. Найдите площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. На рисунке 11.5 изображена криволинейная трапеция, площадь которой требуется найти.

Одной из первообразных функции $f(x) = \sin x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ является функция $F(x) = -\cos x$. Тогда $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$. ◄

Пример 2. Найдите площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 4x - x^2$ и прямой $y = 0$.

Решение. График функции f пересекает прямую $y = 0$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$ (рис. 11.6). Тогда фигура, площадь которой требуется найти, является криволинейной трапецией, ограниченной графиком функции f и прямыми $y = 0$, $x = 0$ и $x = 4$.

Одной из первообразных функции f на промежутке $[0; 4]$ является функция $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$. Тогда

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}$. ◄

Рис. 11.5

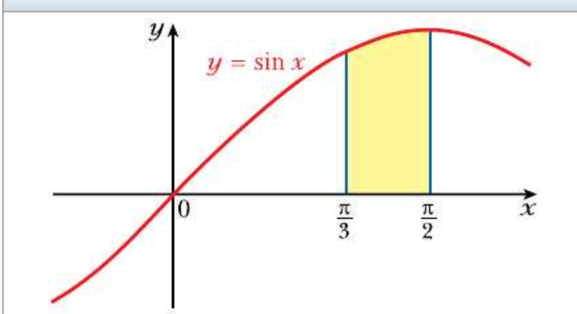
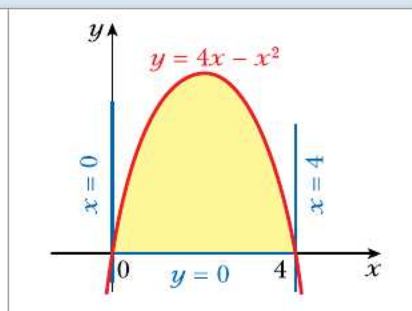


Рис. 11.6



Определение

Пусть F — первообразная функции f на промежутке I, числа a и b, где $a < b$, принадлежат промежутку I. Разность $F(b) - F(a)$ называют определённым интегралом функции f на промежутке $[a; b]$.

Определённый интеграл функции f на промежутке $[a; b]$ обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читают: «интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс»). Таким образом,

$$\boxed{\int\limits_a^b \boldsymbol{f(x)dx = F(b) - F(a)},} \qquad (1)$$

где F — произвольная первообразная функции f на промежутке I.

Например, функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Тогда для произвольных чисел a и b, где $a < b$, можно записать:

$$\int\limits_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Заметим, что значение разности $F(b) - F(a)$ не зависит от того, какую из первообразных функции f выбрали. Действительно, каждую первообразную G функции f на промежутке I можно представить в виде $G(x) = F(x) + C$, где C — некоторое число. Тогда

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Равенство (1) называют **формулой Ньютона — Лейбница**.

Таким образом, для вычисления определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ по формуле Ньютона — Лейбница надо:

1) найти любую первообразную F функции f на промежутке $[a; b]$;
2) вычислить значение первообразной F в точках $x = b$ и $x = a$;
3) найти разность $F(b) - F(a)$.

При вычислении определённых интегралов разность $F(b) - F(a)$ обозначают $F(x)\Big|_a^b$.

Используя такое обозначение, вычислим, например, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\, dx$. Имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

__Пример 3.__ Вычислите $\int\limits_1^2 (x^4 + x^2 - 2)dx$.

Решение. Имеем:

$$\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}.$$

Ответ: $6\frac{8}{15}$. ◄

Если функция f имеет первообразную F на промежутке $[a;\ b]$ и $c \in (a;\ b)$, то из формулы Ньютона – Лейбница следует такое свойство определённого интеграла:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

Действительно,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \big(F(b) - F(c)\big) + \big(F(c) - F(a)\big) =$$

$$= \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.$$

Если каждая из функций f и g имеет первообразную на промежутке $[a;\ b]$, то, используя теоремы 10.1 и 10.2, можно доказать (сделайте это самостоятельно) такие свойства определённого интеграла:

1) $\boldsymbol{\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$;

2) $\boldsymbol{\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx}$**, где** $\boldsymbol{k}$ **— некоторое число**

Формула Ньютона – Лейбница позволяет установить связь между определённым интегралом и площадью S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$.

Используя теорему 11.1, можно записать:

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx}$$

Заметим, что в этой формуле рассматриваются непрерывные функции f, которые на промежутке $[a;\ b]$ принимают только неотрицательные значения. Однако определённый интеграл можно использовать для вычисления площадей более сложных фигур.

Рассмотрим непрерывные на промежутке $[a; b]$ функции f и g такие, что для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$.

Покажем, как найти площадь S фигуры Ф, ограниченной графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 11.7).

Перенесём фигуру Ф вверх на c_0 единиц так, чтобы полученная фигура Φ_1 находилась выше оси абсцисс (рис. 11.8). Фигура Φ_1 ограничена графиками функций $y = f(x) + c_0$ и $y = g(x) + c_0$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

Рис. 11.7

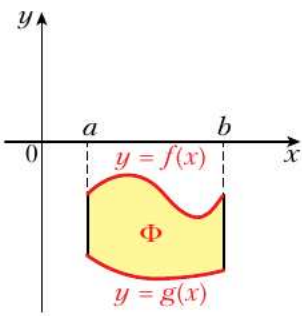
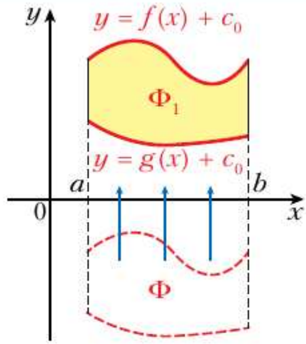


Рис. 11.8



Поскольку фигуры Ф и Φ_1 имеют равные площади, то искомая площадь S равна разности $S_f - S_g$, где:

S_f — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x) + c_0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ (рис. 11.9, *а*);

S_g — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = g(x) + c_0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ (рис. 11.9, *б*).

Таким образом, используя свойства определённого интеграла, можем записать:

$$S = S_f - S_g = \int_a^b \left(f(x) + c_0\right)dx - \int_a^b \left(g(x) + c_0\right)dx =$$

$$= \int_a^b \left(\left(f(x) + c_0\right) - \left(g(x) + c_0\right)\right)dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

Следовательно, *если функции f и g непрерывны на промежутке $[a; b]$ и для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, то площадь S фигуры, ограниченной графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x = b$, можно вычислить по формуле*

$$\boldsymbol{S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

Пример 4. Найдите площадь S фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ и $g(x) = x^2 - 2x$.

Решение. На рисунке 11.10 изображена фигура, площадь которой требуется найти.

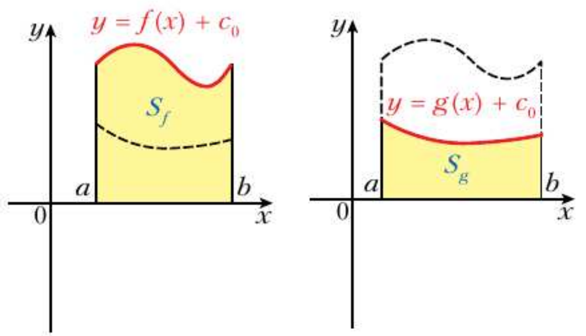
Решив уравнение $f(x) = g(x)$, устанавливаем, что графики функций f и g пересекаются в двух точках с абсциссами $x = 1$ и $x = 3$.

Найдём искомую площадь. Имеем:

$$S = \int_1^3 (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)\,dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right)\Bigg|_1^3 =$$

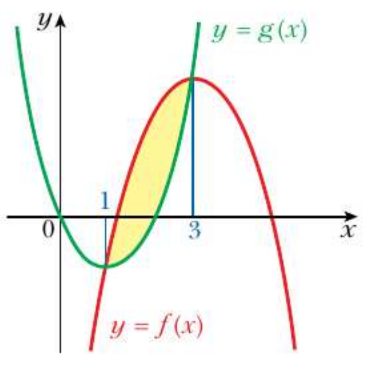
$$= \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1\right) = \frac{8}{3}. ◄$$

Рис. 11.9



а б

Рис. 11.10

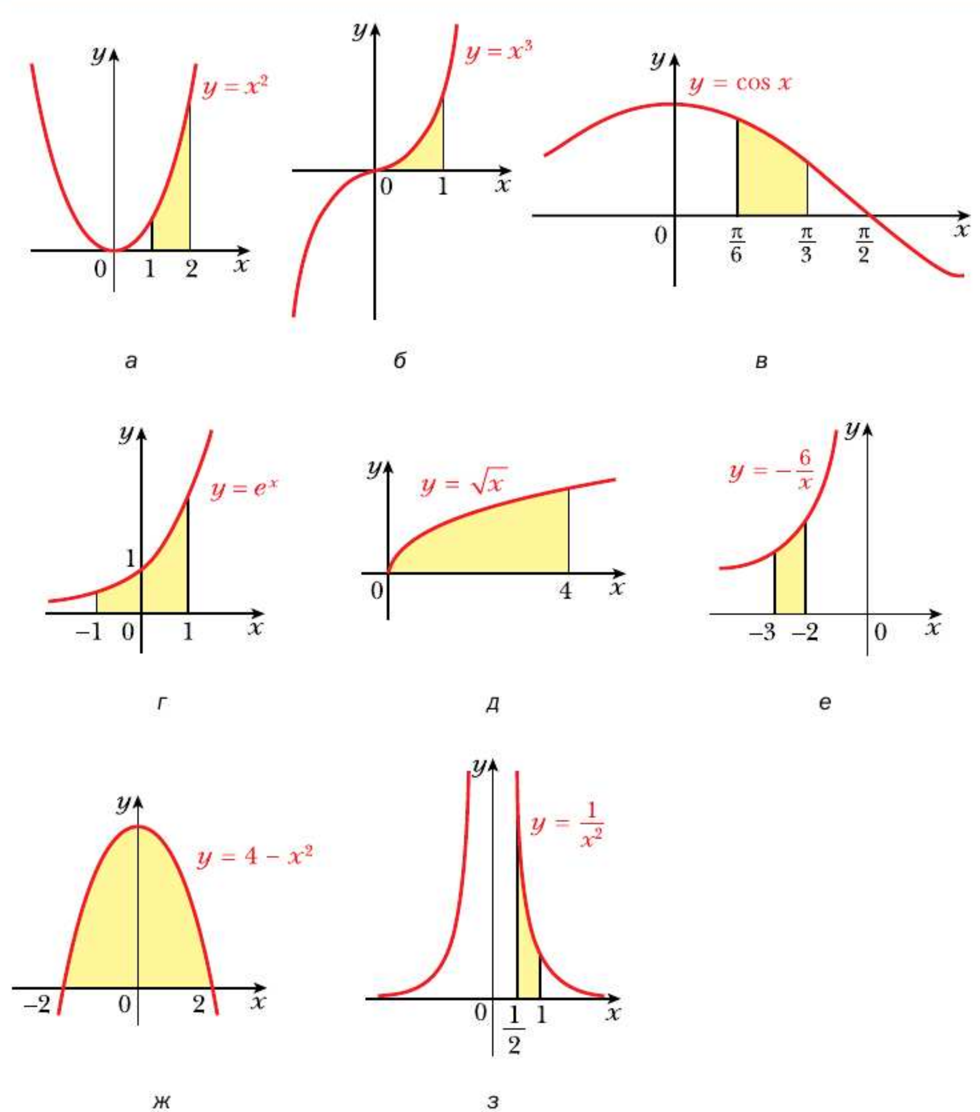


1. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
2. По какой формуле можно вычислить площадь криволинейной трапеции?
3. Что называют определённым интегралом функции f на промежутке $[a; b]$?
4. Какое равенство называют формулой Ньютона — Лейбница?
5. Запишите свойства определённого интеграла.

Упражнения

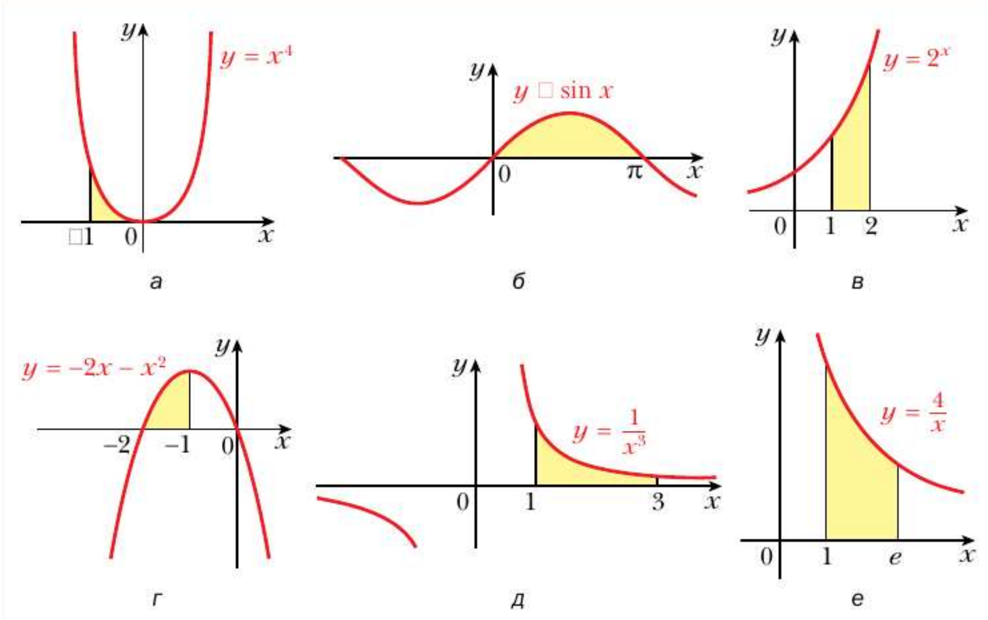
11.1. Найдите площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 11.11.

Рис. 11.11



11.2. Найдите площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 11.12.

Рис. 11.12



11.3. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_5^7 x\,dx$;

2) $\int\limits_3^8 2\,dx$;

3) $\int\limits_{-3}^0 x^2\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^2 x^4\,dx$;

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;

6) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

7) $\int\limits_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

8) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;

9) $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

10) $\int\limits_{-2}^3 3^x\,dx$;

11) $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$;

12) $\int\limits_{-4}^{-2} (2x+4)\,dx$;

13) $\int\limits_0^6 (3x^2 - x)\,dx$;

14) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 2\cos x)\,dx$.

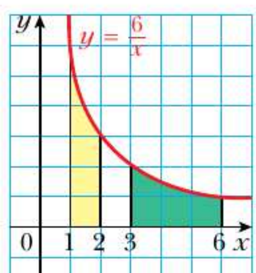
11.4. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_{-4}^{-2} 2\,dx$;
4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;
7) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;
2) $\int\limits_{1}^{2} x^3\,dx$;
5) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$;
8) $\int\limits_{4}^{9} \sqrt{x}\,dx$;
3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;
6) $\int\limits_{0}^{4} e^x\,dx$;
9) $\int\limits_{-1}^{1} (1-5x^4)\,dx$.

11.5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной:
1) графиком функции $y = x^2 + 1$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
2) графиком функции $y = \cos x$ и прямыми $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
3) графиком функции $y = -x^3$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$;
4) графиком функции $y = 3 - 2x - x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;
5) графиком функции $y = \frac{1}{2x}$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;
6) графиком функции $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс;
7) графиком функции $y = \sin 2x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$;
8) графиком функции $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$;
9) графиком функции $y = e^x + 1$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$;
10) графиком функции $y = \sqrt{5-x}$ и прямыми $y = 0$, $x = -4$.

11.6. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:
1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;
2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
3) $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$;
4) $y = \frac{1}{(x+2)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;
5) $y = \sqrt{x+4}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 5$;
6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -4$.

Рис. 11.13



11.7. Докажите, что криволинейные трапеции, закрашенные на рисунке 11.13, равновелики.

11.8. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_1^3 (4x^3 - 4x + 3)dx$;

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3dx}{\sin^2 2x}$;

4) $\int\limits_{-2}^{1} (x-3)^2 dx$;

5) $\int\limits_{\frac{1}{5}}^{1} (5x-3)^5 dx$;

6) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$;

7) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}$;

8) $\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin\frac{x}{6} + \cos 5x\right)dx$;

9) $\int\limits_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)dx$;

10) $\int\limits_{-6}^{0} e^{-\frac{x}{6}} dx$;

11) $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(4x+1)^3}$;

12) $\int\limits_{12}^{116} \sqrt[3]{\frac{x}{4} - 2}\, dx$.

11.9. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_1^4 \left(\frac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right)dx$;

2) $\int\limits_{\frac{4\pi}{3}}^{4\pi} \sin\frac{x}{4}dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}$;

4) $\int\limits_0^1 (2x-1)^4 dx$;

5) $\int\limits_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

6) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-2x} dx$;

7) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{3x+1}$;

8) $\int\limits_1^{\frac{7}{6}} \frac{dx}{(6x-5)^2}$;

9) $\int\limits_1^4 \sqrt{7x-3}\, dx$.

11.10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2$, $y = 4$;
2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;
3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
4) $y = \dfrac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;
5) $y = \dfrac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;
7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;
8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;
9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;
11) $y = x^3$, $y = x^2$;
12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
13) $y = \dfrac{7}{x}$, $x + y = 8$;
14) $y = \dfrac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 2$;
15) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

11.11. Найдите площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 8$, $x = 1$;
2) параболой $y = 0{,}5x^2$ и прямой $y = -x$;
3) параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3$;
4) параболой $y = 6 + x - x^2$ и прямой $y = 6 - 2x$;
5) параболами $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = 4 - x^2$;
6) гиперболой $y = \dfrac{3}{x}$ и прямыми $y = 3$, $x = 3$;
7) графиком функции $y = e^{-x}$ и прямыми $y = e$, $x = 0$;
8) гиперболой $y = \dfrac{5}{x}$ и прямой $x + y = 6$.

11.12. При каком положительном значении a определённый интеграл $\int\limits_0^a (6 - 2x)dx$ принимает наибольшее значение?

11.13. При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, равна 9?

11.14. При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, равна 8?

11.15. При каком значении a прямая $x = a$ разбивает фигуру, ограниченную графиком функции $y = \dfrac{2}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 3$, $x = 12$, на две равновеликие фигуры?

11.16. При каком значении a прямая $x = a$ разбивает фигуру, ограниченную графиком функции $y = -x^3$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$, на две равновеликие фигуры?

11.17. При каких значениях a выполняется неравенство:

1) $\int\limits_0^a (4-2x)dx < 3$, где $a > 0$;

2) $\int\limits_{\log_{0,2} 6}^{a} 0{,}2^x\,dx > \frac{19}{\ln 0{,}2}$, где $a > \log_{0,2} 6$?

11.18. При каких значениях a выполняется неравенство $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{a}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx > 1{,}5$, где $a > \frac{1}{2}$?

11.19. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \operatorname{tg}^2 3x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2\sin^2\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\cos x\,dx$;

4) $\int\limits_1^2 \frac{e^x+x^3}{x^3e^x}\,dx$.

11.20. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{15\pi}{4}} \operatorname{ctg}^2\frac{x}{5}\,dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 7x\cos 3x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^2-e^x}{x^2e^x}\,dx$.

11.21. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;
2) $y = -x^2$, $y = x - 2$;
3) $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$;
4) $y = x^2 - 2x$, $y = x$;
5) $y = 3\sin x$, $y = -2\sin x$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$;
6) $y = \frac{4}{x} - 2$, $y = 2$, $x = 2$, $x = 4$.

11.22. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 4x$, $y = x - 4$;
2) $y = 3 - x^2$, $y = 2x$;
3) $y = \cos x$, $y = -2\cos x$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
4) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

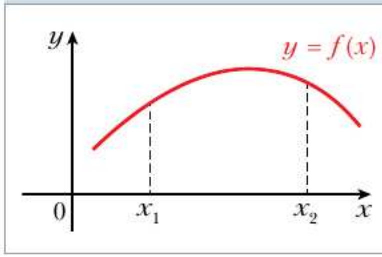
Упражнения для повторения

11.23. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{6}}(1-x) < \log_{\frac{1}{6}} 2$.

11.24. Упростите выражение $\frac{\sin 5\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha}$.

11.25. На рисунке 11.14 изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь графиком, сравните $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

Рис. 11.14



§ 12. Вычисление объёмов тел

В предыдущем параграфе вы узнали, как с помощью интегрирования можно вычислять площадь криволинейной трапеции.

Напомним, что если фигура ограничена графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 12.1), то её площадь можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Рассмотрим функцию $l(x) = f(x) - g(x)$. Величина $l(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$ равна длине отрезка, по которому вертикальная прямая $x = x_0$ пересекает данную фигуру (рис. 12.2). Следовательно, можно записать:

$$S = \int_a^b l(x)dx.$$

Рис. 12.1

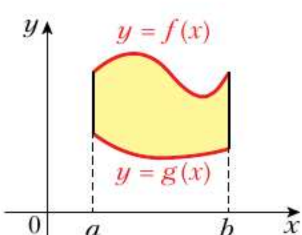
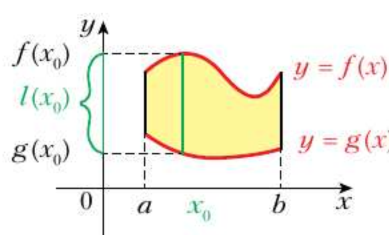


Рис. 12.2



Оказывается, что последнюю формулу можно обобщить для решения задач на вычисление объёмов пространственных тел.

В пространственной прямоугольной системе координат рассмотрим тело Ф, объём которого равен V. Пусть сечением тела Ф плоскостью $x = x_0$ является фигура площадью $S(x_0)$, а проекцией тела Ф на ось абсцисс является промежуток $[a; b]$ (рис. 12.3). Если $y = S(x)$ — непрерывная на промежутке $[a; b]$ функция, то объём тела Ф можно вычислить по формуле

$$\boxed{\boldsymbol{V = \int_a^b S(x)dx}}$$

Эту формулу можно доказать, используя идею доказательства теоремы 11.1.

Покажем, как с помощью этой формулы вывести формулу объёма пирамиды.

Пусть дана пирамида с высотой OM, равной h, и основанием, площадь которого равна S (рис. 12.4). Докажем, что объём пирамиды равен $V = \frac{1}{3}Sh$.

Рис. 12.3

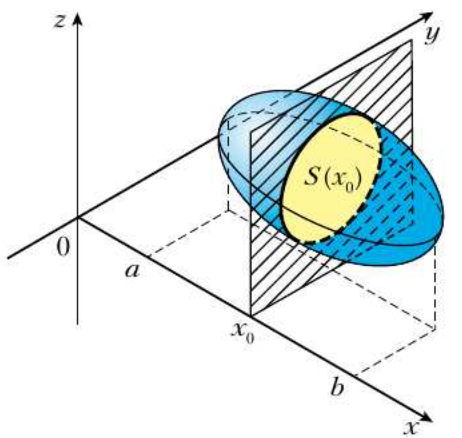
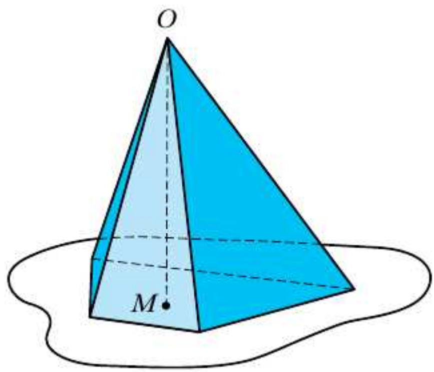


Рис. 12.4

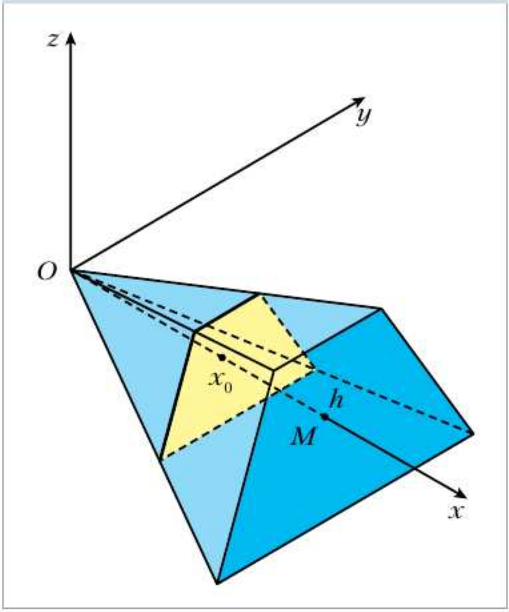


Введём систему координат так, чтобы вершина пирамиды O совпала с началом координат, а высота пирамиды OM принадлежала положительной полуоси абсцисс (рис. 12.5). Тогда основание пирамиды лежит в плоскости $x = h$. Поэтому проекцией пирамиды на ось абсцисс является промежуток $[0; h]$.

Пусть сечением пирамиды плоскостью $x = x_0$ является многоугольник с площадью $S(x_0)$. Плоскость этого сечения параллельна плоскости основания пирамиды. Поэтому многоугольник, образованный в сечении, подобен основанию пирамиды. При этом коэффициент подобия равен $\frac{x_0}{h}$. Воспользовавшись теоремой об отношении площадей подобных фигур, получаем пропорцию:

$$\frac{S(x_0)}{S} = \frac{x_0^2}{h^2}.$$

Рис. 12.5



Отсюда $S(x_0) = \frac{x_0^2}{h^2} S$. Теперь можно записать:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2} S\,dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh.$$

Пример. Фигура, ограниченная графиком функции $f(x) = x^2 + 1$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (рис. 12.6), вращается вокруг оси абсцисс, образуя тело объёма V (рис. 12.7). Найдите V.

Решение. При пересечении образовавшегося тела плоскостью $x = x_0$, где $x_0 \in [0; 1]$, получаем круг (рис. 12.8), радиус которого равен $f(x_0)$. Тогда площадь этого круга равна

$$S(x_0) = \pi f^2(x_0) = \pi(x_0^2 + 1)^2 = \pi(x_0^4 + 2x_0^2 + 1).$$

Поэтому

$$V = \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \pi(x^4 + 2x^2 + 1)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{28\pi}{15}.$$

Ответ: $\frac{28\pi}{15}$. ◄

Рис. 12.6

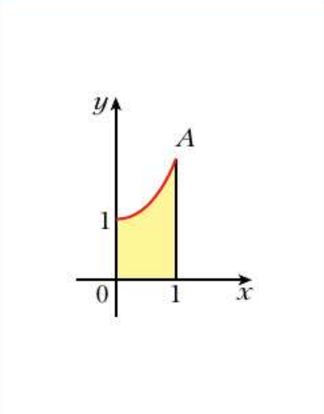


Рис. 12.7

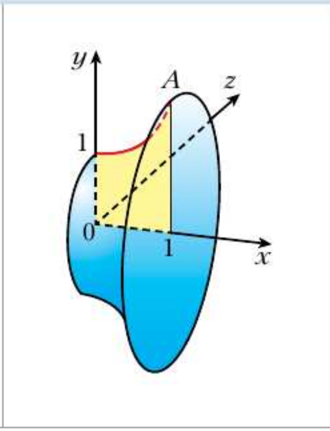
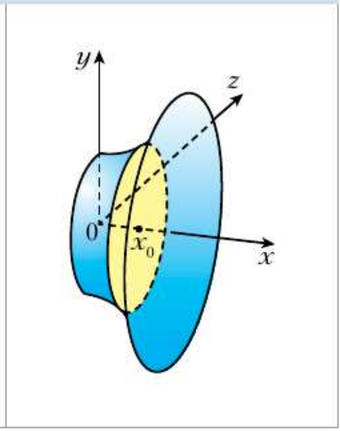


Рис. 12.8



Вообще, имеет место такое утверждение.

Если при вращении фигуры, ограниченной графиком непрерывной на промежутке $[a; b]$ функции f, принимающей на этом промежутке неотрицательные значения, и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вокруг оси абсцисс образуется тело объёма V, то

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

1. Опишите, как с помощью интеграла можно вычислить объём пирамиды.

2. Опишите, как с помощью интеграла можно вычислить объём тела вращения.

Упражнения

12.1. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$;
2) $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
4) $y = x^2$, $y = x$;
5) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$, $y = x$.

12.2. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

2) $y = x - x^2$, $y = 0$;

3) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 2$.

12.3. В шаре радиуса R на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра шара проведена плоскость, которая разбивает шар на две части. Найдите объёмы этих частей.

12.4. Докажите, что объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

12.5. Выведите формулу для вычисления объёма конуса.

Готовимся к изучению новой темы

12.6. Коробка шоколадных конфет с орехами содержит 24 конфеты, среди которых 8 конфет с миндальным орехом, а остальные с орехом фундук. Из коробки берут наугад одну конфету. Какова вероятность того, что выбранная конфета будет: 1) с миндальным орехом; 2) с орехом фундук; 3) с орехом; 4) с грецким орехом?

12.7. В конструкторском бюро работает 100 человек. По итогам года 15 из них получили почётные грамоты, а 8 человек – ценные подарки, причём один человек получил и грамоту, и ценный подарок. Других поощрений не было. Найдите вероятность того, что наугад выбранный сотрудник конструкторского бюро:

1) получил почётную грамоту;

2) получил почётную грамоту и ценный подарок;

3) не получил ценного подарка;

4) был поощрён.

12.8. Опрошено 1000 человек, пользующихся компьютерами. Установлено, что 80% из них имеют навык работы с программой Word, 60% имеют навык работы с программой Excel, а 10% не умеют работать ни с программой Word, ни с программой Excel. Найдите вероятность того, что наугад выбранный человек (среди опрошенных) умеет пользоваться и программой Word, и программой Excel. Изменится ли ответ, если будет опрошено не 1000, а, например, 1200 человек и получатся такие же результаты опроса?

«Кто превзошёл своим умом род человеческий»

Эти величественные слова написаны потомками о знаменитом английском учёном – физике и математике Исааке Ньютоне (1643–1727). В истории науки в одном ряду с Ньютоном стоит ещё одна выдающаяся личность – немецкий учёный Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), который оставил после себя неизгладимый след в философии, математике, юриспруденции, логике, дипломатии, истории, политологии. Среди огромного научного наследия этих гениальных учёных особое место занимают результаты, связанные с созданием дифференциального и интегрального исчисления – науки о производных и первообразных.

Надо подчеркнуть, что Ньютон и Лейбниц создавали свои теории в то время, когда привычные для нас понятия и термины либо вообще не существовали, либо не имели точного смысла. Попробуйте представить себе учебник по алгебре, в котором нет терминов «множество», «функция», «действительное число», «предел» и т. п. Более того, многие удобные современные обозначения тогда ещё не стали общеупотребительными. Некоторые из них Ньютону и Лейбницу пришлось изобретать самим или обобщать уже имеющиеся. Например, Лейбниц начал обозначать операцию умножения точкой (до того использовали символы: $\square$, $\times$, *, M и т. д.), операцию деления – двоеточием (ранее часто использовали букву D); Ньютон распространил обозначение для степени a^n на случай целых и дробных значений n, а обозначение $\sqrt{x}$ обобщил до $\sqrt[n]{x}$. Термин «функция» и символ интеграла «$\int$» впервые встречаются в трудах Лейбница.

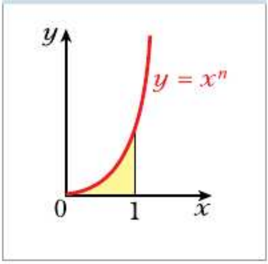
Исаак Ньютон

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Вообще, историю развития математики можно смело разделить на эпохи до и после появления производной и интеграла. Открытия Ньютона и Лейбница дали возможность учёным быстро и просто решать задачи, которые раньше считались абсолютно неприступными.

Приведём характерный пример. В первой половине XVII века выдающийся итальянский математик Бонавентура Кавальери (1598–1647) предложил новый метод для вычисления площадей. Пользуясь этим методом, Кавальери смог вычислить площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = x^n$, осью абсцисс и вертикальной прямой $x = 1$, при некоторых значениях n (рис. 12.9). Настойчиво работая более 10 лет, с помощью крайне сложных и громоздких рассуждений Кавальери смог решить задачу только для натуральных значений n, меньших 10.

Рис. 12.9



Очевидно, что используя формулу Ньютона – Лейбница, искомую площадь можно найти в одну строку не только для натуральных, но и для всех положительных значений n:

$$S = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Однако в те времена метод, предложенный Кавальери, имел необычайно важное значение, поскольку до XVII века в течение многих веков все попытки учёных решить такую или подобную задачу были вообще безрезультатными.

Для своих расчётов Кавальери сформулировал такой принцип:

если все прямые, параллельные между собой, пересекают фигуры F_1 и F_2 по отрезкам одинаковой длины (рис. 12.10), *то такие фигуры имеют равные площади.*

Рис. 12.10

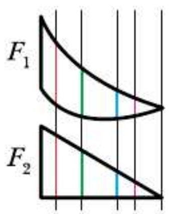
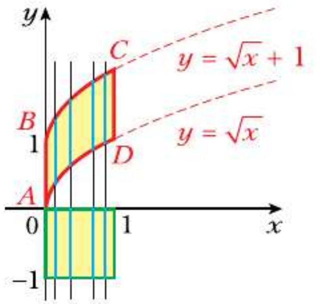


Рис. 12.11

Рис. 12.12



Ознакомившись с этим принципом, в 1644 году выдающийся итальянский математик и физик Эванджелиста Торричелли писал: «Несомненно, что геометрия Кавальери есть удивительное по своей экономии средство для нахождения теорем... Это – истинно царская дорога среди зарослей математического терновника».

Например, из принципа Кавальери следует, что прямоугольник и параллелограмм с одинаковыми стороной и высотой имеют равные площади (рис. 12.11). Однако принцип Кавальери работает и для более сложных фигур. Например, рассмотрим две фигуры: единичный квадрат и криволинейный четырёхугольник $ABCD$, ограниченный линиями $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 1$, $x = 0$ и $x = 1$ (рис. 12.12). Каждая вертикальная прямая пересекает обе фигуры по отрезкам единичной длины. Тогда из принципа Кавальери следует, что площадь криволинейного четырёхугольника $ABCD$ равна площади единичного квадрата, то есть единице. В справедливости этого вывода вы можете убедиться самостоятельно, вычислив площадь криволинейного четырёхугольника $ABCD$ с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

Идеи, близкие к сформулированному принципу Кавальери, натолкнули Ньютона и Лейбница на создание удобной общей теории, которая позволяет просто и быстро строить касательные к сложнейшим кривым, находить наибольшие и наименьшие значения функций, вычислять площади разнообразных фигур, решать многие другие важные и сложные задачи.

Итоги главы 2

Первообразная

✓ **Функцию F называют первообразной функции f на промежутке I, если для всех $x \in I$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.**

Основное свойство первообразной

✓ **Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и C — любое число, то функция вида $y = F(x) + C$ также является первообразной функции f на промежутке I.**

✓ **Любую первообразную функции f на промежутке I можно представить в виде $y = F(x) + C$, где C — некоторое число.**

Таблица первообразных

Функция f	Первообразная функции f
k (постоянная)	kx
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x$
e^x	e^x
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

Правила нахождения первообразной

- ✓ Если функции F и G являются соответственно первообразными функций f и g на промежутке I, то на этом промежутке функция $y = F(x) + G(x)$ является первообразной функции $y = f(x) + g(x)$.
- ✓ Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и k — некоторое число, то на этом промежутке функция $y = kF(x)$ является первообразной функции $y = kf(x)$.
- ✓ Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и k — некоторое число, отличное от нуля, то на соответствующем промежутке функция $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ является первообразной функции $y = f(kx + b)$.

Площадь криволинейной трапеции

- ✓ Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, вычисляют по формуле $S = F(b) - F(a)$, где F — любая первообразная функции f на промежутке $[a; b]$.

Определённый интеграл

- ✓ Пусть F — первообразная функции f на промежутке I, числа a и b, где $a < b$, принадлежат промежутку I. Разность $F(b) - F(a)$ называют определённым интегралом функции f на промежутке $[a; b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Формула Ньютона — Лейбница

- ✓ $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Свойства определённого интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где k — некоторое число

Площадь фигуры

Если функции f и g непрерывны на промежутке $[a; b]$ и для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, то площадь S фигуры, ограниченной графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x - b$, можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Объём тела

Если при вращении фигуры, ограниченной графиком непрерывной на промежутке $[a; b]$ функций f, принимающей на этом промежутке неотрицательные значения, и прямыми $x = a$, $x - b$, $y = 0$, вокруг оси абсцисс образуется тело объёма V, то $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$

Глава 3. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

В этой главе вы ознакомитесь с индуктивным методом рассуждений, научитесь доказывать утверждения методом математической индукции.

Узнаете, какое множество называют упорядоченным. Выясните, сколько различных комбинаций, образованных по определённым правилам, можно составить из элементов данного конечного множества. Познакомитесь с общей формулой возведения двучлена в натуральную степень.

§ 13. Метод математической индукции

Изучая окружающий мир, нам часто приходится делать выводы на основании результатов наблюдений и опытов.

Общие выводы, полученные на основании изучения частных случаев, называют **индуктивными**, а сам метод, с помощью которого сделаны эти выводы, называют **индуктивным методом** или **индукцией** (от лат. *inductio* — «наведение»).

Например, задолго до открытия законов движения Земли люди пришли к выводу, что Солнце утром встаёт на востоке, а вечером уходит за горизонт на западе. Этот вывод являлся индуктивным, ведь он основывался только на наблюдениях.

Конечно, с помощью индукции не всегда можно получить правильные выводы. Так, если в вашей и соседней школах среди учителей начальных классов нет мужчин, то это не означает, что все учителя начальных классов — женщины.

Несмотря на необходимость относиться к индуктивным выводам с определённой степенью недоверия, индуктивный метод широко применяется в математике.

Рассмотрим два примера.

• Попробуем подметить закономерность в поведении сумм n первых нечётных натуральных чисел. Обозначим символом S_n сумму n первых нечётных чисел. Договоримся, что $S_1 = 1$. Имеем:

$S_1 = 1 = 1;$
$S_2 = 1 + 3 = 4;$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16;$
$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Числа 1, 4, 9, 16, 25 являются квадратами последовательных натуральных чисел.

Можно сделать такое предположение: для любого натурального n

$$S_n = n^2. \qquad (1)$$

• Рассмотрим значения многочлена $f(n) = n^2 - n + 41$ при значениях n, равных 1, 2, 3, 4, 5. Имеем:

$f(1) = 41$ – простое число;

$f(2) = 43$ – простое число;

$f(3) = 47$ – простое число;

$f(4) = 53$ – простое число;

$f(5) = 61$ – простое число.

Можно сделать такое предположение: для любого натурального n значение многочлена $f(n)$ является простым числом.

Два приведённых предположения являются лишь гипотезами, которые следует или доказать, или опровергнуть.

Один из способов опровергнуть гипотезу – привести контрпример. Для второго предположения такой контрпример легко найти. Имеем: $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ – составное число. Таким образом, гипотеза опровергнута.

Попытка найти контрпример для первого индуктивного вывода может привести к таким равенствам:

$S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$;

$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$;

$S_8 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$.

Полученные равенства только подкрепляют уверенность в том, что выдвинутая гипотеза верна. Понятно, что вычисление суммы с очередным нечётным слагаемым не приведёт к доказательству гипотезы: сколько бы сумм мы ни вычислили, нельзя гарантировать того, что среди бесконечного количества оставшихся сумм не встретится такая, для которой равенство (1) не выполняется.

Чтобы доказать справедливость высказанной гипотезы, нужно провести некоторые общие рассуждения.

Пусть равенство (1) справедливо для k слагаемых, то есть

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Рассмотрим сумму, содержащую $k + 1$ слагаемое:

$$S_{k+1} = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{S_k} + (2k + 1) = S_k + (2k + 1).$$

С учётом предположения $S_k = k^2$ имеем: $S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Приведённые рассуждения гарантируют, что *если равенство* (1) *верно для $n = k$, то оно остаётся верным и для $n = k + 1$.*

Теперь можно утверждать, что равенство (1) доказано для любого натурального значения n. Поясним это.

Поскольку $S_1 = 1$, то равенство (1) верно для $n = 1$. Следовательно, оно верно для $n = 1 + 1 = 2$, а тогда оно верно при $n = 2 + 1 = 3$, при $n = 3 + 1 = 4$, при $n = 4 + 1 = 5$ и т. д. Таким образом можно достичь любого натурального значения n. Следовательно, равенство (1) верно при всех натуральных значениях n.

Рассмотренный метод доказательства называют **методом математической индукции**. В общем виде его можно описать так.

Пусть надо доказать, что некоторое утверждение верно для любого натурального значения n.

Доказательство этого факта методом математической индукции состоит из двух частей (*теорем*):

1) *доказывают* (*проверяют*) *справедливость утверждения для* $n = 1$;

2) *предполагают, что утверждение верно для* $n = k$, *и на основании этого доказывают, что оно верно для* $n = k + 1$.

Теорему, которую доказывают в первой части, называют **базой индукции**.

Например, при доказательстве равенства (1) базой индукции являлось утверждение, что равенство (1) выполняется при $n = 1$.

Теорему, которую доказывают во второй части метода, называют **индуктивным переходом**.

Пример 1. Выведите формулу для вычисления значения суммы

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 5} + \frac{17}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)},\ \text{где } n \in \boldsymbol{N}.$$

Решение. Для $n = 1$: $S_1 = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$.

Для $n = 2$: $S_2 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 5} = \frac{4}{5}$.

Для $n = 3$: $S_3 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 5} + \frac{17}{5\cdot 7} = \frac{9}{7}$.

Для $n = 4$: $S_4 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 5} + \frac{17}{5\cdot 7} + \frac{31}{7\cdot 9} = \frac{16}{9}$.

Можно сделать такое предположение: для всех $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется равенство

$$S_n = \frac{n^2}{2n+1}. \tag{2}$$

Докажем эту гипотезу методом математической индукции.

Ранее мы проверили справедливость формулы (2) для $n = 1$, тем самым доказав теорему «база индукции».

Теперь докажем теорему «индуктивный переход».

Пусть формула (2) верна при $n = k$, то есть $S_k = \frac{k^2}{2k+1}$.

Имеем: $$S_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{17}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{2k^2 - 1}{(2k-1)(2k+1)}}_{S_k} + \frac{2(k+1)^2 - 1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= S_k + \frac{2(k+1)^2 - 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k^2}{2k+1} + \frac{2k^2 + 4k + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^3 + 3k^2 + 2k^2 + 4k + 1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{2k^3 + 2k^2 + 3k^2 + 3k + k + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2(k+1) + 3k(k+1) + k + 1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 3k + 1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)^2}{2k+3} = \frac{(k+1)^2}{2(k+1)+1}.$$

Итак, предположив, что формула (2) верна при $n = k$, мы доказали, что она верна и при $n = k + 1$. А с учётом теоремы «база индукции» можно сделать вывод, что гипотеза (2) верна. ◀

<u>**Пример 2.**</u> Докажите, что для любого $n \in \boldsymbol{N}$ значение выражения $5^n - 3^n + 2n$ кратно 4.

Решение. При $n = 1$ получаем $5^1 - 3^1 + 2 \cdot 1 = 4$. Поскольку число 4 делится нацело на число 4 (это обозначают так: $4 \,\vdots\, 4$), то теорема «база индукции» доказана.

Пусть при $n = k$ утверждение верно, то есть

$$(5^k - 3^k + 2k) \,\vdots\, 4.$$

Докажем, что тогда это утверждение верно при $n = k + 1$, то есть

$$(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2(k+1)) \,\vdots\, 4.$$

Для доказательства достаточно показать, что разность $(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2k + 2) - (5^k - 3^k + 2k)$ кратна 4.

Перепишем эту разность так:

$$5^k(5-1) - 3^k(3-1) + 2 = 4 \cdot 5^k - 2(3^k - 1).$$

Поскольку 3^k — нечётное число, то $3^k - 1$ — чётное число, то есть $(3^k - 1) \,\vdots\, 2$. Таким образом, значение полученного выражения кратно 4.

Следовательно, доказываемое утверждение верно, в чём мы убедились с помощью метода математической индукции. ◀

Методом математической индукции можно пользоваться и в тех случаях, когда надо доказать утверждение для всех натуральных n таких, что

$n \geqslant n_0$, где $n_0 \in \boldsymbol{N}$, $n_0 > 1$. В этом случае теорему «база индукции» доказывают (проверяют) для $n = n_0$.

Пример 3. Докажите, что для любого $n \in \boldsymbol{N}$ и $n > 4$ выполняется неравенство $2^n > n^2$.

Решение. При $n = 5$ имеем верное неравенство $2^5 > 5^2$.

Пусть доказываемое неравенство верно при $n = k$, то есть $2^k > k^2$, где $k \in \boldsymbol{N}$, $k > 4$. Имеем:

$$2 \cdot 2^k > 2k^2;$$
$$2^{k+1} > 2k^2.$$

Легко показать (убедитесь в этом самостоятельно), что при $k > 1 + \sqrt{2}$, а тем более при $k > 4$ выполняется неравенство $2k^2 > (k + 1)^2$. Отсюда

$$2^{k+1} > (k + 1)^2.$$

Мы показали, что при $n = 5$ выполняется теорема «база индукции», и при $n > 4$ доказали теорему «индуктивный переход». Следовательно, рассматриваемое неравенство верно при любых натуральных n таких, что $n > 4$. ◄

1. Какие выводы называют индуктивными?
2. Опишите схему доказательства методом математической индукции.
3. Из каких двух теорем состоит доказательство методом математической индукции?

Упражнения

13.1. Числа 24, 44, 64, 84 кратны 4. Можно ли из этого сделать вывод, что число, которое оканчивается цифрой 4, кратно 4?

13.2. Значения многочлена $f(n) = n^2 - n + 17$ при $n = 1$, $n = 2$, ..., $n = 16$ являются простыми числами. Можно ли отсюда сделать вывод, что $f(n)$ является простым числом при всех $n \in \boldsymbol{N}$?

13.3. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство:

1) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

3) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

13.4. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство:

1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

2) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

3) $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

13.5. Выведите формулу для вычисления суммы

$\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

13.6. Выведите формулу для вычисления суммы

$\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

13.7. Докажите неравенство $2^n > 2n + 1$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 3$.

13.8. Докажите неравенство $3^n > 4n + 1$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 3$.

13.9. Докажите, что для любого натурального n:

1) $(3^{2n+1} + 2^{n+2}) \vdots 7$;   2) $(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}) \vdots 17$.

13.10. Докажите, что для любого натурального n:

1) $(7^{n+1} + 8^{2n-1}) \vdots 19$;   2) $(7 \cdot 24^n - 5 \cdot 13^n - 2^{n+1}) \vdots 11$.

Готовимся к изучению новой темы

13.11. Сколько пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если эти числа должны начинаться:

1) с цифры 5;   2) с записи «23»?

13.12. Сколько существует четырёхзначных чисел, все цифры которых нечётные?

13.13. Сколько трёхзначных чётных чисел, все цифры которых должны быть различными, можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

13.14. В селе 3000 жителей. Докажите, что по крайней мере у трёх из них одинаковые инициалы.

§ 14. Перестановки. Размещения

В 9 классе вы ознакомились с двумя комбинаторными правилами: правилом суммы и правилом произведения. В этом учебном году вы продолжите изучение основ комбинаторики.

Вы знаете, что при записи множества его элементы пишут в произвольном порядке. Например, $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$. Однако в комбинаторике рассматривают также **упорядоченные множества**. Например, запись (b, a, c)

задаёт трёхэлементное упорядоченное множество, в котором на первом месте стоит элемент b, на втором — элемент a, а на третьем — элемент c. Запись (c, b, a) задаёт другое упорядоченное множество, состоящее из тех же элементов a, b и c.

Определение

Перестановкой конечного множества M называют любое упорядоченное множество, образованное из всех элементов множества M.

Например, существует шесть перестановок множества $M = \{a, b, c\}$. Выпишем их:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Перестановки данного конечного множества различаются только порядком следования элементов.

Например, если требуется определить количество способов, которыми ученики вашего класса могут выстроиться друг за другом в очереди в буфет, то для этого надо найти количество перестановок множества учеников вашего класса.

Количество перестановок n-элементного множества обозначают символом P_n, используя первую букву французского слова *permutation* — «перестановка». Например, рассматривая трёхэлементное множество $M = \{a, b, c\}$, мы установили, что $P_3 = 6$.

Если $M = \{a\}$, то существует только один способ упорядочения этого множества: элемент a стоит на первом месте. Поэтому $P_1 = 1$.

Докажем, что для любого натурального n справедлива формула

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Эту формулу можно доказать с помощью метода математической индукции (убедитесь в этом самостоятельно). Мы рассмотрим комбинаторное доказательство.

Пусть множество M состоит из n элементов. Записать любую перестановку множества M — это фактически присвоить каждому элементу этого множества некоторый номер от 1 до n. Поэтому количество перестановок множества M равно количеству способов нумерации его элементов.

Выберем некоторый элемент a этого множества. Существует n способов присвоить этому элементу номер. Далее выберем некоторый элемент b из множества M. Так как элементу a номер уже присвоен, то существует $n - 1$ способ присвоить номер элементу b. Понятно, что следующий элемент можно пронумеровать $n - 2$ способами и т. д. Для последнего невыбранного элемента множества M существует только один способ присвоить ему номер, так как к этому моменту $n - 1$ элементов уже получили свои номера.

Следовательно, по правилу произведения можно записать:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Произведение первых n натуральных чисел обозначают так: $n!$ (читают: «эн факториал»). Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Считают, что $1! = 1$.

Таким образом, справедлива формула

$$\boxed{\boldsymbol{P_n = n!}}$$

По правилам *FIFA*[1] в финальной части чемпионата мира по футболу участвуют 32 команды. Выясним, сколькими способами могут быть распределены золотые, серебряные и бронзовые медали (три призовых места) между командами.

Первое место может занять любая из 32 команд, второе место — любая из 31 команды, третье — любая из оставшихся 30 команд. По правилу произведения количество возможных вариантов распределения мест равно $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$.

Решив эту задачу, мы выяснили, сколько существует трёхэлементных упорядоченных подмножеств данного 32-элементного множества. Каждое из таких упорядоченных подмножеств называют **размещением из 32 элементов по 3 элемента**.

Определение

Любое k-элементное упорядоченное подмножество данного n-элементного множества называют размещением из n элементов по k элементов.

Количество всех возможных размещений из n элементов по k элементов обозначают символом A_n^k, используя первую букву французского слова *arrangement* — «размещение».

Результат, полученный в задаче о распределении призовых мест, позволяет сделать вывод: $A_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$.

Докажем, что при любых натуральных n и k таких, что $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}} \qquad (1)$$

Рассмотрим n-элементное множество и сформируем его k-элементное упорядоченное подмножество.

Существует n способов выбора первого элемента подмножества. После того как выбран первый элемент, второй элемент подмножества можно выбрать уже только $n-1$ способами. После выбора первого и второго эле-

[1] Международная федерация футбольных ассоциаций.

ментов остаётся $n - 2$ способа для выбора третьего элемента подмножества. Продолжая эти рассуждения, получаем, что выбор k-го элемента можно осуществить $n - k + 1$ способами.

Следовательно, по правилу произведения можно записать:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Итак, формула (1) доказана.

Число A_n^n – это количество перестановок n-элементного множества, то есть

$$A_n^n = P_n.$$

Этот факт можно также получить, если в формулу (1) вместо k подставить n. Имеем:

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n!.$$

Принято считать, что $0! = 1$. Тогда формулу (1) можно записать компактнее.

Умножим и разделим выражение, стоящее в правой части формулы (1), на $(n - k)!$ (это можно сделать, так как $(n - k)! \neq 0$). Имеем:

$A_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Получаем формулу

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}}$$

Пример. Сколько существует правильных дробей, числитель и знаменатель которых простые числа, меньшие 30?

Решение. Десятиэлементное множество $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ состоит из всех простых чисел, меньших 30. Количество двухэлементных упорядоченных подмножеств этого множества равно количеству обыкновенных дробей, отличных от единицы, числитель и знаменатель которых указанные простые числа. Половина из этих дробей правильные. Следовательно, искомое число равно $\frac{1}{2}A_{10}^2 = 45$. ◄

1. Опишите, какое множество называют упорядоченным.

2. Что называют перестановкой конечного множества?

3. Как называют и обозначают произведение первых n натуральных чисел?

4. По какой формуле можно вычислить количество перестановок n-элементного множества?

5. Что называют размещением из n элементов по k элементов?

6. По какой формуле можно вычислить количество размещений из n-элементного множества по k элементов?

Упражнения

14.1. Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг?

14.2. Сколькими способами могут сесть в автомобиль марки «Калина» 5 человек, если каждый из них может быть водителем?

14.3. В футбольной команде (11 человек) надо выбрать капитана и вице-капитана. Сколькими способами это можно сделать?

14.4. Комиссия, состоящая из 15 человек, должна выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

14.5. В 10 классе изучают 16 предметов. Расписание содержит 6 уроков в один учебный день. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один учебный день так, чтобы все 6 уроков были разными?

14.6. В финальной части чемпионата Европы по футболу участвуют 24 команды. Сколькими способами могут распределиться золотые и серебряные награды?

14.7. Научная группа, состоящая из 9 человек, должна делегировать на конференции трёх представителей: одного в Великобританию, второго во Францию, третьего в Германию. Сколькими способами можно это сделать?

14.8. Через железнодорожную станцию должны одновременно пройти 3 поезда. Сколькими способами диспетчер может организовать прохождение составов, если в его распоряжении 5 свободных путей?

14.9. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$;

2) $\dfrac{A_{12}^4 \cdot P_7}{A_{11}^9}$;

3) $\dfrac{A_{m-1}^{n-1} \cdot P_{m-n}}{P_{m-1}}$, где $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \leqslant m$.

14.10. Докажите, что $A_n^{n-1} = P_n$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$.

14.11. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $A_{x+1}^2 = 156$;

2) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$;

3) $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 720$;

4) $\dfrac{P_{x+1}}{A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3} = 210$.

14.12. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $A_x^2 = 20$; 2) $A_x^5 = 18 \cdot A_{x-2}^4$; 3) $\dfrac{A_x^3 + 3A_x^2}{P_{x+1}} = \dfrac{1}{2}$.

14.13. Сколькими способами в таблице размером $n \times n$ можно выбрать n клеточек так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце была одна выбранная клеточка?

14.14. На плоскости отметили 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько различных незамкнутых ломаных с вершинами в данных точках можно построить, если ломаная должна проходить через каждую из десяти точек по одному разу?

14.15. Сколькими способами 30 учеников могут сесть за 15 парт?

14.16. Руководство фирмы приобрело для своих сотрудников 6 туристических путёвок в разные страны. Сколькими способами эти путёвки можно распределить между 25 сотрудниками, если один сотрудник не может получить более одной путёвки?

14.17. В коробке лежат n карточек, на которых записаны числа от 1 до n. Из коробки надо последовательно выбрать 5 карточек. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

◇

14.18. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся нацело на 5?

14.19. Сколько существует семизначных чисел, которые делятся нацело на 25?

14.20. У учащегося есть 7 книг по математике, 4 книги по физике и 2 книги по астрономии. Сколькими способами он может расставить эти книги на полке так, чтобы книги по одному предмету стояли рядом?

14.21. Пять мальчиков и пять девочек садятся в ряд на десяти стульях. Сколькими способами они могут расположиться так, чтобы мальчики сидели на стульях с чётными номерами, а девочки — на стульях с нечётными номерами?

14.22. В 10 классе 32 учащихся. Каждые двое учащихся обменялись друг с другом фотографиями. Сколько всего было подарено фотографий?

14.23. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были чётными?

14.24. В охранной фирме работает 15 человек. Надо организовать дежурство в трёхэтажном и четырёхэтажном зданиях, поставив по одному дежурному на каждом этаже. Сколько существует способов расставить дежурных?

✲

14.25. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна нечётная цифра?

14.26. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

14.27. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть две одинаковые цифры?

14.28. Игральный кубик бросают три раза. Сколько различных последовательностей очков, среди которых есть хотя бы одна шестёрка, можно получить?

Готовимся к изучению новой темы

14.29. Выпишите все подмножества множества: 1) {1, 2}; 2) {a, b, c}.

14.30. Сколько существует двухэлементных подмножеств четырёхэлементного множества?

14.31. Выясните, каких подмножеств у пятиэлементного множества больше: двухэлементных или трёхэлементных.

§ 15. Сочетания (комбинации)

Рассмотрим такие две задачи.

1) Сколькими способами в классе, в котором 30 учащихся, можно выбрать старосту и его заместителя?

2) Сколькими способами в классе, в котором 30 учащихся, можно назначить двух дежурных?

Ответ к первой задаче вам известен: это количество 2-элементных *упорядоченных* подмножеств 30-элементного множества, то есть A_{30}^2. Чтобы решить вторую задачу, надо определить количество 2-элементных подмножеств 30-элементного множества (именно подмножеств, а не упорядоченных подмножеств). Каждое из таких подмножеств называют **сочетанием** (**комбинацией**) из 30 элементов по 2 элемента.

Определение

Любое k-элементное подмножество заданного n-элементного множества называют сочетанием (комбинацией) из n элементов по k элементов.

Количество всех возможных сочетаний из n элементов по k элементов обозначают символом C_n^k, используя первую букву французского слова *combinaison* – «комбинация».

Теперь задачу о количестве способов назначения двух дежурных можно сформулировать следующим образом: чему равно C_{30}^2?

Вычислим значение C_n^k для нескольких частных случаев.

Поскольку существует n одноэлементных подмножеств заданного n-элементного множества, то

$$C_n^1 = n. \tag{1}$$

У данного n-элементного множества существует только одно n-элементное подмножество, поэтому

$$C_n^n = 1.$$

Поскольку заданное n-элементное множество имеет только одно подмножество, не содержащее ни одного элемента (это пустое подмножество), то

$$C_n^0 = 1.$$

Пустое множество содержит только одно подмножество – это $\varnothing$, поэтому

$$C_0^0 = 1.$$

Докажем, что при любых натуральных n и k таких, что $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}} \tag{2}$$

Рассмотрим некоторое n-элементное множество. Количество его k-элементных подмножеств равно C_n^k. Из каждого такого подмножества можно образовать $k!$ упорядоченных k-элементных подмножеств. Следовательно, количество всех k-элементных упорядоченных подмножеств данного n-элементного множества равно $C_n^k \cdot k!$, то есть $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$.

Поскольку $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ и $P_k = k!$, то формулу (2) можно представить в следующем виде:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}} \tag{3}$$

Отметим, что эта формула остаётся справедливой и для случаев, когда $k = 0$, $k = n$ или $n = 0$. Действительно,

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = 1,$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!0!} = 1.$$

Задача 1. Докажите, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{4}$$

Решение. Эту формулу можно доказать с помощью формулы (3). Убедитесь в этом самостоятельно.

У формулы (4) есть и другое, комбинаторное, доказательство. Выбирая k-элементное подмножество A из n-элементного множества M, мы тем самым однозначно задаём $(n-k)$-элементное подмножество, состоящее из всех элементов множества M, не принадлежащих множеству A. Следовательно, количество способов выбора k-элементного подмножества равно количеству способов выбора $(n-k)$-элементного подмножества, то есть справедлива формула (4). ◄

Задача 2. Докажите, что

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Эту формулу можно доказать с помощью формулы (3). Сделайте это самостоятельно.

1. Что называют сочетанием из n элементов по k элементов?
2. По какой формуле можно вычислить количество сочетаний из n элементов по k элементов?

Упражнения

15.1. Вычислите:

1) C_7^2; 2) C_4^3; 3) C_{100}^{99}; 4) $C_5^0 + C_7^7 + C_{11}^1$.

15.2. Вычислите:

1) C_8^3; 2) C_5^4; 3) C_{1000}^{999}; 4) $C_9^1 + C_8^0 + C_{17}^1$.

15.3. Упростите выражение:

1) $\frac{2}{n}C_{n+1}^{n-1}$; 2) $\frac{3}{n}C_{2n}^{2n-1}$.

15.4. Упростите выражение:

1) $\frac{6}{n+2}C_{n+2}^{n}$; 2) $\frac{1}{2n-1}C_{2n+1}^{2n-2}$.

15.5. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $C_x^2 = 153$;
2) $C_{x+2}^3 = 8(x+1)$;
3) $C_x^{x-2} = 45$;
4) $3C_{2x}^{x+1} = 2C_{2x+1}^{x-1}$.

15.6. Решите в натуральных числах уравнение:

1) $C_x^2 = 120$;
2) $C_{x+2}^3 = 7(x+2)$;
3) $C_x^{x-2} = 66$;
4) $11C_{2x}^{x} = 6C_{2x+1}^{x+1}$.

15.7. В классе 29 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 5 человек для участия в математической олимпиаде?

15.8. На плоскости отметили 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

15.9. Дан выпуклый n-угольник. Сколько существует четырёхугольников с вершинами, содержащимися среди вершин данного n-угольника?

15.10. Встретившись, семеро знакомых пожали друг другу руки. Сколько рукопожатий было сделано?

15.11. В шахматной секции занимаются 5 девочек и 12 мальчиков. Сколькими способами можно сформировать команду из 2 девочек и 5 мальчиков для участия в соревнованиях?

15.12. У одного мальчика есть 11 марок, а у другого – 20 марок (все марки разные). Сколькими способами можно обменять 3 марки одного мальчика на 3 марки другого?

15.13. На плоскости задано 5 параллельных прямых. Их пересекают 7 параллельных прямых. Сколько параллелограммов при этом образовалось?

15.14. На прямой отметили 12 точек, а на параллельной ей прямой – 7 точек. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в этих точках?

15.15. Среди 20 рабочих 7 штукатуров. Сколькими способами можно составить бригаду из 5 человек так, чтобы в неё входило 2 штукатура?

15.16. Для школьной лотереи подготовили 100 билетов, из которых 12 – выигрышные. Первый ученик наугад выбирает 10 билетов. Сколько существует вариантов, при которых он выберет 3 выигрышных билета?

15.17. В классе 35 учащихся. Для участия в турнире «Математический бой» формируется команда, состоящая из капитана, его заместителя и четырёх членов команды. Сколькими способами можно сформировать такую команду?

15.18. На прямой отметили 12 точек, а на параллельной ей прямой – 7 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

15.19. Сколько существует способов из 8 разных цветков составить букет с нечётным количеством цветков?

15.20. Комиссия, состоящая из 15 человек, может начать работу, если на заседании есть кворум, то есть присутствуют не менее 10 её членов. Сколько существует способов достичь кворума?

15.21. Среди 20 рабочих 7 штукатуров. Сколькими способами можно составить бригаду из 5 человек так, чтобы в неё входило не менее 2 штукатуров?

15.22. Для школьной лотереи подготовили 100 билетов, из которых 12 выигрышных. Первый ученик выбирает наугад 10 билетов. Сколько существует вариантов, при которых он выберет не менее 2 выигрышных билетов?

15.23. Из 20 человек надо сформировать комиссию из 7 членов, причём Пётр Иванович и Иван Петрович не должны входить в комиссию одновременно. Сколькими способами это можно сделать?

15.24. Сколькими способами можно разбить 12 спортсменов на 3 команды по 4 человека в каждой?

15.25. У матери есть 9 разных конфет. Сколькими способами она может угостить своих троих детей так, чтобы каждому досталось по 3 конфеты?

15.26. На занятиях танцевального кружка присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами из них можно выбрать 4 пары для танца?

Готовимся к изучению новой темы

15.27. Докажите тождество:

1) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
2) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

15.28. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(a + 1)^3$;
2) $(m - 3)^3$;
3) $(a + 2b)^3$;
4) $(3 - n)^3$;
5) $(-2 + 3x)^3$;
6) $(-3 - 2y)^3$.

15.29. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(x + *)^3 = * + 21x^2 + * + *$;
2) $(* - 2a)^3 = 27m^6 - * + * - *$.

§ 16. Бином Ньютона

Вам известны формулы сокращённого умножения для выражений $(a + b)^2$ и $(a + b)^3$. Докажем, что имеет место такая общая формула:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n. \quad (1)$$

Доказательство проведём методом математической индукции.

При $n = 1$ имеем: $(a + b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$, то есть теорема «база индукции» доказана.

Пусть при $n = k$ формула верна, то есть

$$(a + b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b^1 + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^1 b^{k-1} + C_k^k b^k. \quad (2)$$

Докажем, что эта формула верна при $n = k + 1$.

Умножим обе части равенства (2) на $a+b$. Получим:

$$(a+b)^{k+1} = \left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b^1 + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^1 b^{k-1} + C_k^k b^k\right)(a+b) =$$
$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b^1 + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a^1 b^k +$$
$$+ C_k^0 a^k b^1 + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-1} b^3 + \ldots + C_k^{k-1} a^1 b^k + C_k^k b^{k+1}.$$

Приведём в правой части подобные слагаемые:

$$(a+b)^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b^1 + (C_k^1 + C_k^2) a^{k-1} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^1 b^k + C_k^k b^{k+1}.$$

Воспользовавшись формулой $C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}$ (см. задачу 2 в § 15), получим:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b^1 + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_{k+1}^k a^1 b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

Следовательно, доказываемая формула (1) верна, в чём мы убедились с помощью метода математической индукции.

Учитывая, что $C_n^0 = C_n^n = 1$, перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$\boldsymbol{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n}$$

Полученную формулу называют **формулой бинома Ньютона**, а коэффициенты C_n^k — **биномиальными коэффициентами**.

Заметим, что в формуле бинома Ньютона выражение $(a+b)^n$ представлено как сумма $n+1$ слагаемого, где $(k+1)$-е слагаемое имеет вид

$$\boldsymbol{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$$

Если в формуле бинома Ньютона вместо b подставить $-b$, то получим формулу

$$\boldsymbol{(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + (-1)^n b^n}$$

Пример 1. Раскройте скобки в выражении $(a+b)^5$.

Решение. Поскольку $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$, $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$, то можно записать

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Выражение $\left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} + 2x^3\right)^{40}$ разложили по формуле бинома Ньютона. Какой член разложения не зависит от x?

Решение. Запишем $(k+1)$-й член разложения:

$$T_{k+1} = C_{40}^{k}\left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^{3}}}\right)^{40-k}\left(2x^{3}\right)^{k} = C_{40}^{k}5^{40-k}2^{k}x^{-\frac{3}{4}(40-k)+3k}.$$

Слагаемое T_{k+1} не будет зависеть от x, если $-\frac{3}{4}(40-k)+3k=0$. Отсюда $k=8$ и девятый член разложения $T_9 = C_{40}^{8}5^{32}2^{8}$ не зависит от x.

Ответ: $T_9 = C_{40}^{8}5^{32}2^{8}$. ◄

Используя формулу бинома Ньютона, запишем разложения выражений $(a+b)^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$ или $n=0$, в такой форме:

$(a+b)^0$: $\quad 1$

$(a+b)^1$: $\quad 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1$

$(a+b)^2$: $\quad 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a^1b^1 + 1 \cdot b^2$

$(a+b)^3$: $\quad 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b^1 + 3 \cdot a^1b^2 + 1 \cdot b^3$

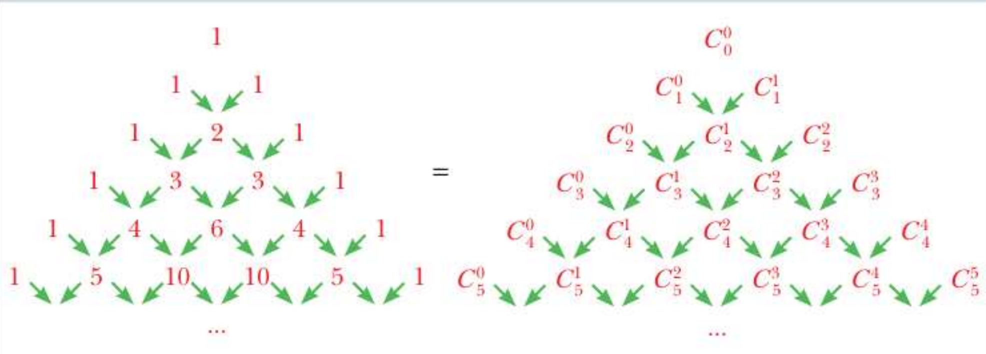
$(a+b)^4$: $\quad 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b^1 + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot a^1b^3 + 1 \cdot b^4$

$(a+b)^5$: $\quad 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b^1 + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot a^1b^4 + 1 \cdot b^5$

....

Записанные в треугольную таблицу биномиальные коэффициенты (рис. 16.1) обладают многими интересными свойствами. Например, можно увидеть, что, сложив два соседних числа, получим число, записанное в следующей строке между двумя данными числами.

Рис. 16.1



Это свойство следует из равенства $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

В справочной литературе по математике можно увидеть большее количество строк треугольной таблицы биномиальных коэффициентов. Её называют **треугольником Паскаля** в честь французского математика Блеза Паскаля, который написал подробный трактат об этой треугольной таблице чисел.

Блез Паскаль
1623—1662

Французский математик, физик, литератор и философ. Один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии. Создал первые образцы вычислительной техники.

Пример 3. Докажите, что сумма чисел в каждой строке треугольника Паскаля является степенью числа.

Решение. В формулу (1)

$$C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = (a+b)^n$$

подставим значения $a = b = 1$. Получим:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Осталось только заметить, что $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$ являются числами одной строки треугольника Паскаля (см. рис. 16.1). ◄

1. Что называют перестановкой конечного множества?
2. Что называют размещением n-элементного множества по k элементов?
3. Что называют сочетанием n-элементного множества по k элементов?
4. Какую формулу называют бином Ньютона?
5. Сформулируйте свойства треугольника Паскаля и биномиальных коэффициентов.

Упражнения

16.1. Запишите формулу бинома Ньютона для $(a+b)^6$.

16.2. Запишите формулу бинома Ньютона для $(a+b)^7$.

16.3. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(a+*)^4 = * + * + * + * + 16b^4$;

2) $(* + *)^5 = x^{10} + 10x^8 + * + * + * + *$.

16.4. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(* - 2n)^4 = m^4 - * + * - * + *$;

2) $(* + *)^5 = y^{15} + * + * + * + * + 32z^5$.

16.5. Вычислите сумму $3^n + C_n^1 3^{n-1}2^1 + C_n^2 3^{n-2}2^2 + \ldots + C_n^{n-1}3^1 2^{n-1} + 2^n$.

16.6. Вычислите сумму $C_{100}^0 - C_{100}^1 + C_{100}^2 - C_{100}^3 + \ldots + C_{100}^{100}$.

16.7. Вычислите сумму $2^{300} - C_{300}^1 2^{299} + C_{300}^2 2^{298} - C_{300}^3 2^{297} + \ldots - C_{300}^{299} 2 + 1$.

16.8. Докажите, что:

$$1 + C_{100}^1 3 + C_{100}^2 3^2 + \ldots + C_{100}^{99} 3^{99} + 3^{100} = 5^{100} - C_{100}^1 5^{99} + C_{100}^2 5^{98} - \ldots$$
$$\ldots - C_{100}^{99} 5 + 1.$$

16.9. Докажите, что:

$$1 + C_{100}^1 3 + C_{100}^2 3^2 + \ldots + C_{100}^{99} 3^{99} + 3^{100} = 1 - C_{200}^1 3 + C_{200}^2 3^2 - \ldots - C_{200}^{199} 3^{199} +$$
$$+ 3^{200}.$$

16.10. Найдите отношение суммы чисел в 20-й строке треугольника Паскаля к сумме чисел в 19-й строке.

16.11. Найдите отношение суммы чисел в 100-й строке треугольника Паскаля к сумме чисел в 200-й строке.

16.12. В выражении $\left(\sqrt{5} + \sqrt[3]{3}\right)^{100}$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Какое количество полученных слагаемых являются рациональными числами?

16.13. В выражении $\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{2}\right)^{800}$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Какое количество полученных слагаемых являются рациональными числами?

16.14. При каком значении n восьмой член разложения выражения $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$ по формуле бинома Ньютона не зависит от x?

16.15. В выражении $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{22}$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Какой член разложения можно представить в виде cx^2, где c — некоторое число?

16.16. В выражении $\left(x^4+\frac{1}{x}\right)^n$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Известно, что шестой член разложения имеет вид $56x^7$. Найдите n.

16.17. Найдите количество нулей в конце десятичной записи значения выражения $1001^{1000}-1$.

16.18. Найдите количество нулей в конце десятичной записи значения выражения $999^{1001}+1$.

16.19. Для всех $x \in \boldsymbol{R}$ и $n \in \boldsymbol{N}$ докажите неравенство $(1+x)^n+(1-x)^n \geqslant 2$.

16.20. Вычислите суммы $A = C_{101}^1 + C_{101}^3 + C_{101}^5 + \ldots + C_{101}^{101}$ и $B = C_{101}^0 + C_{101}^2 + C_{101}^4 + \ldots + C_{101}^{100}$.

Когда сделаны уроки

Различные схемы применения метода математической индукции

Пример 1. Найдите все натуральные значения n, при которых $(1+2^n+4^n) \vdots 7$.

Решение. Введём обозначение $a_n = 1+2^n+4^n$. В поисках гипотезы естественно найти значения a_n для нескольких первых значений n.

При $n = 1$: $a_n = 7$, то есть $a_n \vdots 7$;
при $n = 2$: $a_n = 21$, то есть $a_n \vdots 7$;
при $n = 3$: $a_n = 73$, то есть $a_n \not\vdots\ 7$;
при $n = 4$: $a_n = 273$, то есть $a_n \vdots 7$;
при $n = 5$: $a_n = 1057$, то есть $a_n \vdots 7$;
при $n = 6$: $a_n = 4161$, то есть $a_n \not\vdots\ 7$.

Теперь можно сделать такое предположение:
$a_n \vdots 7$ при $n = 3k-2$ и $n = 3k-1$, $k \in \boldsymbol{N}$;
$a_n \not\vdots\ 7$ при $n = 3k$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Методом математической индукции несложно доказать высказанную гипотезу, то есть доказать такие три утверждения:
$1+2^{3k-2}+4^{3k-2} \vdots 7$, $k \in \boldsymbol{N}$;
$1+2^{3k-1}+4^{3k-1} \vdots 7$, $k \in \boldsymbol{N}$;
$1+2^{3k}+4^{3k} \not\vdots\ 7$, $k \in \boldsymbol{N}$. ◄

Однако для решения этой задачи можно применить и другую схему индуктивных рассуждений.

Метод математической индукции, рассмотренный в § 13, образно можно сравнить с движением по лестнице: если вы стали на первую ступеньку и уверены, что, находясь на k-й ступеньке, сможете с неё перейти на $(k + 1)$-ю ступеньку, то вы гарантированно сможете попасть на любую ступеньку лестницы.

Но побывать на каждой ступеньке можно и другим способом. Например, если вы стали на первую ступеньку, а затем двигаетесь с шагом 2, то есть переступая через ступеньку, то вы побываете на всех ступеньках с нечётными номерами. Ясно, что если начать движение со второй ступеньки, то вы таким образом пройдёте все ступеньки с чётными номерами, а следовательно, за два прохода побываете на всех ступеньках.

Этот пример показывает, что возможна следующая схема индуктивного доказательства. В теореме «база индукции» доказывается (проверяется) справедливость утверждения при $n = 1$ и $n = 2$. Теорема «индуктивный переход» заключается в следующем: предполагают, что утверждение верно для $n = k$, а далее доказывают, что оно верно для $n = k + 2$.

Такую схему рассуждений будем называть индукцией с шагом 2.

Индуктивные рассуждения можно вести с шагом 3, 4, 5 и т. д.

Например, покажем, как можно решить задачу из примера 1, используя индукцию с шагом 3.

Теорема «база индукции»: $a_1 \vdots 7$, $a_2 \vdots 7$, $a_3 \not\vdots 7$. В истинности этих утверждений мы убедились выше.

Теорема «индуктивный переход»: пусть a_k делится (не делится) нацело на 7; докажем, что a_{k+3} также делится (не делится) нацело на 7.

Для доказательства достаточно показать, что $(a_{k+3} - a_k) \vdots 7$. Завершите решение самостоятельно.

Пример 2. Число a таково, что число $a + \frac{1}{a}$ — целое. Докажите, что для любого натурального n число $a^n + \frac{1}{a^n}$ — также целое.

Решение. При $n = 1$ утверждение верно. Предположим, что при $n = k$ число $a^k + \frac{1}{a^k}$ — целое.

Легко проверить, что справедливо такое равенство:

$$a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} = \left(a^k + \frac{1}{a^k}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}\right). \tag{1}$$

Из него следует, что если числа $a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}$ и $a^k + \frac{1}{a^k}$ являются целыми, то целым является также число $a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}}$. Но в теореме «индуктивный переход» условие того, что число $a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}$ – целое, отсутствует.

Для решения этой задачи схему доказательства методом математической индукции следует видоизменить следующим образом: в теореме «индуктивный переход» предположить, что доказываемое утверждение справедливо при $n = k - 1$ и $n = k$, а далее доказать, что оно справедливо для $n = k + 1$.

Это изменение, в свою очередь, потребует, чтобы в теореме «база индукции» утверждение было проверено не только для $n = 1$, но и для $n = 2$.

Имеем: $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$. Следовательно, число $a^2 + \frac{1}{a^2}$ – целое, так как целым является число $a + \frac{1}{a}$.

Из равенства (1) следует справедливость «обновлённой» теоремы «индуктивный переход», что завершает решение задачи. ◄

Для решения этой задачи нам пришлось усилить условие теоремы «индуктивный переход», при этом шаг индукции остался равным 1.

Другой способ усиления условия теоремы «индуктивный переход» может привести к такой схеме индуктивного доказательства:

1) установить справедливость гипотезы при $n = 1$;

2) из предположения, что гипотеза верна для всех $n \leqslant k$, доказать её справедливость для $n = k + 1$.

Пример 3. Докажите, что любое натуральное число n можно представить в виде суммы нескольких разных степеней числа 2, возможно, включая нулевую (если натуральное число является степенью числа 2, то будем считать, что оно представлено в виде суммы, состоящей из одного слагаемого).

Решение. При $n = 1$ имеем $1 = 2^0$.

Пусть утверждение справедливо для всех натуральных n таких, что $n \leqslant k$, $k \in \boldsymbol{N}$. Рассмотрим натуральное число $k + 1$.

Если это число является степенью числа 2, то теорема «индуктивный переход» доказана. Если число $k + 1$ не является степенью числа 2, то существует такое натуральное число m, что $2^m < k + 1 < 2^{m+1}$. Отсюда $k + 1 = 2^m + p$, где $p \in \boldsymbol{N}$.

Если предположить, что $p \geqslant 2^m$, то $k + 1 \geqslant 2^m + 2^m = 2^{m+1}$, что противоречит неравенству $k + 1 < 2^{m+1}$. Следовательно, $p < 2^m$. Но $2^m < k + 1$, значит, $p < 2^m \leqslant k$.

Имеем: $k + 1 = 2^m + p$, где $p \in \boldsymbol{N}$, $p < k$. Тогда по предположению индукции число p можно представить в виде суммы различных степеней числа 2, причём среди этих слагаемых нет числа 2^m. Добавив к этой сумме число 2^m, получим искомое представление числа $k + 1$. ◄

Итоги главы 3

Метод математической индукции

✓ Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого натурального значения n:
1) доказывают (проверяют) справедливость утверждения для $n = 1$ (база индукции);
2) предполагают, что утверждение верно для $n = k$, и на основании этого доказывают, что оно верно для $n = k + 1$ (индуктивный переход).

Перестановки

✓ Перестановкой конечного множества M называют любое упорядоченное множество, образованное из всех элементов множества M.

✓ Количество перестановок n-элементного множества вычисляют по формуле $P_n = n!$.

Размещения

✓ Любое k-элементное упорядоченное подмножество данного n-элементного множества называют размещением из n элементов по k элементов.

✓ Количество размещений из n элементов по k элементов вычисляют по формуле $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Сочетания (комбинации)

✓ Любое k-элементное подмножество заданного n-элементного множества называют сочетанием (комбинацией) из n элементов по k элементов.

✓ Количество сочетаний из n элементов по k элементов вычисляют по формуле $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Бином Ньютона

✓ $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n$

Глава 4. Элементы теории вероятностей

В этой главе вы продолжите изучение элементов теории вероятностей. Изучите новые формулы для вычисления вероятностей событий, узнаете, какие события называют зависимыми и независимыми, познакомитесь со случайными величинами и их характеристиками.

Вы научитесь находить вероятность события при условии, что произошло другое событие, сможете использовать новую вероятностную модель — схему Бернулли для вычисления вероятностных характеристик разнообразных испытаний, узнаете, как на основе выводов теории вероятностей можно принимать решения в жизненных ситуациях.

§ 17. Операции над событиями

В 9 классе вы познакомились с понятием события, выяснили, какие события называют достоверными, невозможными, равновероятными. Вы узнали, что вероятность события можно оценивать по его частоте, научились находить вероятность события в опытах с равновозможными результатами.

В теории вероятностей нередко бывает так, что в одном испытании необходимо установить те или иные соотношения между несколькими событиями. Этот параграф посвящён изучению таких соотношений.

В дальнейшем, рассматривая соотношения между событиями, будем считать, что эти события относятся к одному опыту.

Рассмотрим опыт, состоящий в подбрасывании игрального кубика. В этом испытании можно рассмотреть следующие события:

A – «на кубике выпала тройка»;

B – «на кубике выпало чётное число»;

C – «на кубике выпало нечётное число».

Очевидно, что в этом опыте события A и B не могут произойти одновременно.

Определение

Если в некотором опыте два события не могут произойти одновременно, то их называют несовместными.

Таким образом, в опыте с подбрасыванием игрального кубика события A и B являются несовместными. События B и C также являются несовместными. Пару же событий A и C нельзя назвать несовместными. Действительно, если при подбрасывании кубика выпадет тройка, то одновременно произойдёт и событие A, и событие C.

Приведём ещё один пример. Внутри прямоугольника $ABCD$ наугад выбирают точку (рис. 17.1). Пусть событие X состоит в том, что выбранная точка принадлежит кругу синего цвета, а событие Y – в том, что выбранная точка принадлежит треугольнику красного цвета.

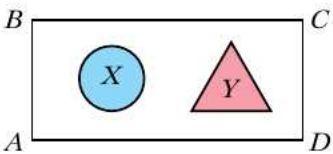


Рис. 17.1

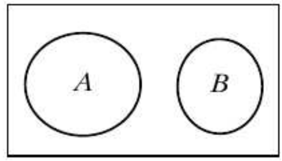


Рис. 17.2

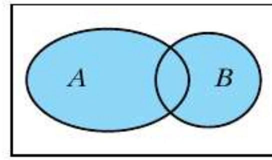


Рис. 17.3

Поскольку синий круг не имеет общих точек с красным треугольником, то события X и Y являются несовместными.

Испытание с выбором точки внутри прямоугольника часто используют для иллюстрации тех или иных соотношений между событиями. Например, несовместные события A и B иллюстрируют двумя непересекающимися фигурами A и B (рис. 17.2). Такие рисунки называют диаграммами Эйлера.

Обратимся к следующему примеру. Для жеребьёвки подготовили жетоны с номерами от 1 до 5. Опыт состоит в том, что участник жеребьёвки наугад вытягивает один жетон. Рассмотрим следующие события:

U – «участник вытянул жетон с одним из номеров: 1, 2, 3»;

V – «участник вытянул жетон с одним из номеров: 3, 4»;

W – «участник вытянул жетон с одним из номеров: 1, 2, 3, 4».

Заметим, что событие W происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из двух событий U или V.

Определение

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит хотя бы одно из двух событий A или B некоторого опыта, называют объединением событий A и B.

Объединение событий A и B обозначают $A \cup B$.

Таким образом, в опыте с жеребьёвкой событие W является объединением событий U и V, то есть $W = U \cup V$.

На диаграмме Эйлера (рис. 17.3) проиллюстрировано объединение событий A и B.

Объединение событий A и B – это пример **операции над событиями**.

Аналогично определяют объединение трёх или большего количества событий.

Пример 1. В коробке лежат красные, синие и белые шары. Из коробки наугад вытягивают один шар. Событие A состоит в том, что вытянутый шар окажется красным, а событие B – в том, что он окажется синим. Найдите вероятность события $A \cup B$, если $P(A) = \frac{1}{2}$, а $P(B) = \frac{1}{3}$.

Решение. Событие $A \cup B$ состоит в том, что вытянутый наугад шар окажется или красным, или синим. Естественно предположить, что искомая вероятность будет равна сумме $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Обоснуем это предположение. Пусть в коробке лежит n шаров, из которых a красных и b синих. Тогда вероятность события A равна $P(A) = \frac{a}{n}$. Аналогично вероятность события B равна $P(B) = \frac{b}{n}$.

События A и B несовместны. Поэтому исходы, благоприятствующие событию A, отличны от исходов, благоприятствующих событию B. Следовательно, событию $A \cup B$ благоприятствует $a + b$ исходов. Таким образом, вероятность того, что наугад вытянутый шар окажется или красным, или синим, равна

$$P(A \cup B) = \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = P(A) + P(B) = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$. ◄

Решение примера 1 иллюстрирует следующее важное свойство вероятности: ***вероятность объединения двух несовместных событий A и B любого опыта может быть вычислена по формуле***

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}} \qquad (1)$$

Используя метод математической индукции, равенство (1) можно распространить на три или большее количество попарно несовместных событий:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Перейдём к изучению других операций над событиями.

В опыте с подбрасыванием игрального кубика рассмотрим события:

X – «на кубике выпало чётное число»;

Y – «на кубике выпало число, кратное трём»;

Z – «на кубике выпала шестёрка».

Заметим, что событие Z происходит тогда и только тогда, когда одновременно происходит и событие X, и событие Y.

Определение

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит и событие A, и событие B некоторого опыта, называют пересечением событий A и B.

Пересечение событий A и B обозначают $A \cap B$.

Таким образом, в рассмотренном опыте с игральным кубиком событие Z является пересечением событий X и Y, то есть $Z = X \cap Y$.

На диаграмме Эйлера (рис. 17.4) проиллюстрировано пересечение событий A и B.

Рис. 17.4

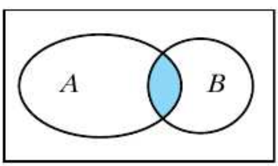
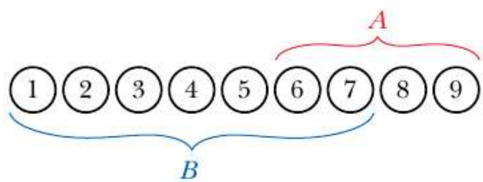


Рис. 17.5



Аналогично определяют пересечение трёх или большего количества событий.

<u>**Пример 2.**</u> Ученик наугад называет натуральное число от 1 до 9 включительно. Событие A состоит в том, что названное число больше пяти. Событие B состоит в том, что названное число меньше восьми. Найдите вероятность события $A \cap B$.

Решение. Все девять результатов в этом опыте равновозможны, поэтому для вычисления вероятности события $A \cap B$ воспользуемся классическим определением вероятности.

Событие $A \cap B$ состоит в том, что названное число больше пяти и меньше восьми одновременно, то есть событие $A \cap B$ происходит, если названо или число 6, или число 7 (рис. 17.5). Событию $A \cap B$ благоприятствуют два из девяти равновозможных результатов, поэтому

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}.$$

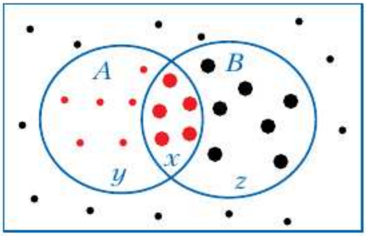
Ответ: $\frac{2}{9}$. ◄

Теорема 17.1

Если A и B — события некоторого испытания, то

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}} \qquad (2)$$

Рис. 17.6



Докажем эту теорему для частного случая — испытания с n равновозможными результатами.

Рассмотрим такую вероятностную модель. Пусть в прямоугольнике отмечено n точек, часть из которых покрашены в красный цвет, а часть имеет больший размер, чем остальные (рис. 17.6).

Количество больших красных точек обозначим через x, маленьких красных — через y, а больших чёрных — через z.

Испытание состоит в том, что из отмеченных n точек прямоугольника наугад выбирают одну. В этом испытании событие A состоит в том, что выбранная точка окажется красной, а событие B — в том, что выбранная точка окажется большой.

Поскольку все исходы в данном опыте равновозможны, то

$$P(A) = \frac{x+y}{n},\ P(B) = \frac{x+z}{n}.$$

Событие $A \cap B$ состоит в том, что выбранная точка окажется красной и большой одновременно, а событие $A \cup B$ — в том, что выбранная точка окажется красной или большой.

Поэтому $P(A \cap B) = \dfrac{x}{n}$, $P(A \cup B) = \dfrac{x+y+z}{n}$.

Учитывая найденные значения вероятностей, перепишем доказываемую формулу (2) в таком виде:

$$\frac{x+y+z}{n} = \frac{x+y}{n} + \frac{x+z}{n} - \frac{x}{n}.$$

Приведя дроби в правой части к общему знаменателю, получим верное равенство, что и доказывает теорему для испытания с n равновозможными результатами.

Обратите внимание на то, что формула (2) является обобщением формулы (1). Действительно, если события A и B несовместны, то они никогда не происходят одновременно, поэтому $P(A \cap B) = 0$.

Пример 3. Каждый слушатель курсов иностранных языков изучает или только английский язык, или только немецкий язык, или оба этих иностранных языка сразу. Пусть событие A состоит в том, что наугад выбранный ученик изучает английский язык, а событие B – в том, что наугад выбранный ученик изучает немецкий язык. Какова вероятность того, что наугад выбранный ученик изучает оба иностранных языка, если $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$?

Решение. Событие $A \cup B$ состоит в том, что наугад выбранный ученик изучает английский или немецкий язык. Поскольку каждый слушатель курсов изучает хотя бы один иностранный язык, то событие $A \cup B$ является достоверным. Отсюда следует, что $P(A \cup B) = 1$. Используя формулу (2), получаем:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - 1 = \frac{3}{20}.$$

Отметим, что событие $A \cap B$ состоит в том, что наугад выбранный ученик изучает и английский язык, и немецкий язык, то есть изучает оба иностранных языка.

Ответ: $\frac{3}{20}$. ◄

Пусть A – событие некоторого испытания. Рассмотрим событие B, состоящее в том, что не произошло событие A. Например, в опыте с игральным кубиком рассмотрим событие A – «на кубике выпало чётное число». Тогда событие B – «на кубике выпало нечётное число».

Определение

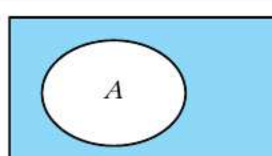
Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда не происходит событие A, называют дополнением события A.

Дополнение события A обозначают $\overline{A}$.

Таким образом, в рассмотренном опыте с игральным кубиком событие B является дополнением события A, то есть $B = \overline{A}$. Также можно сказать, что $A = \overline{B}$.

На диаграмме Эйлера (рис. 17.7) проиллюстрировано дополнение события A.

Рис. 17.7



Отметим, что события A и $\overline{A}$ всегда несовместны. Действительно, они не могут произойти одновременно, поскольку одно из них происходит только тогда, когда не происходит другое.

Кроме того, объединение событий A и $\overline{A}$ равно достоверному событию. Действительно, при любом исходе испытания одно из событий, A или $\overline{A}$, обязательно произойдёт. Поскольку вероятность достоверного события равна 1, то $P(A \cup \overline{A}) = 1$. Учитывая тот факт, что события A и $\overline{A}$ несовместны, а также формулу (1), можно записать равенство:

$$\boldsymbol{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Это равенство используют, например, для вычисления вероятности дополнения события.

1. Какие события называют несовместными?
2. Какое событие называют объединением двух событий и как его обозначают?
3. Чему равна вероятность объединения двух несовместных событий?
4. Какое событие называют пересечением двух событий и как его обозначают?
5. Как можно вычислить вероятность объединения двух событий?
6. Какое событие называют дополнением события и как его обозначают?
7. Как можно вычислить вероятность дополнения события?

Упражнения

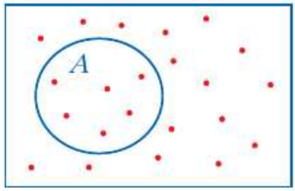
17.1. Являются ли события A и B несовместными, если опыт состоит в том, что:
1) монету подбрасывают один раз: A — «выпал герб», B — «выпало число»;
2) игральный кубик подбрасывают два раза: A — «выпала единица при первом броске», B — «выпала шестёрка при втором броске»;
3) в мишень стреляют два раза: A — «в мишень попали дважды», B — «в мишень попали ровно один раз»?

17.2. Школьный библиотекарь берёт наугад один из учебников. Среди следующих событий найдите пары несовместных:
A — «взят учебник по математике»;
B — «взят учебник для 9 класса»;
C — «взят учебник по физике для 10 класса»;
D — «взят учебник, изданный до 2010 года»;
E — «взят учебник по гуманитарному предмету».

17.3. Шоколадное яйцо с сюрпризом содержит внутри игрушку или для мальчика (машинку или фигурку пирата), или для девочки (куклу или браслет). Событие A состоит в том, что выбранное наугад шоколадное яйцо с сюрпризом содержит игрушку для мальчика, а событие B – в том, что шоколадное яйцо с сюрпризом содержит браслет. Найдите среди событий X, Y, Z, T событие: 1) $\bar{A}$, 2) $A \cup B$, 3) $A \cap \bar{B}$, где:
X – «шоколадное яйцо с сюрпризом содержит куклу»;
Y – «шоколадное яйцо с сюрпризом содержит игрушку для девочки»;
Z – «шоколадное яйцо с сюрпризом содержит машинку или фигурку пирата»;
T – «шоколадное яйцо с сюрпризом не содержит куклу».

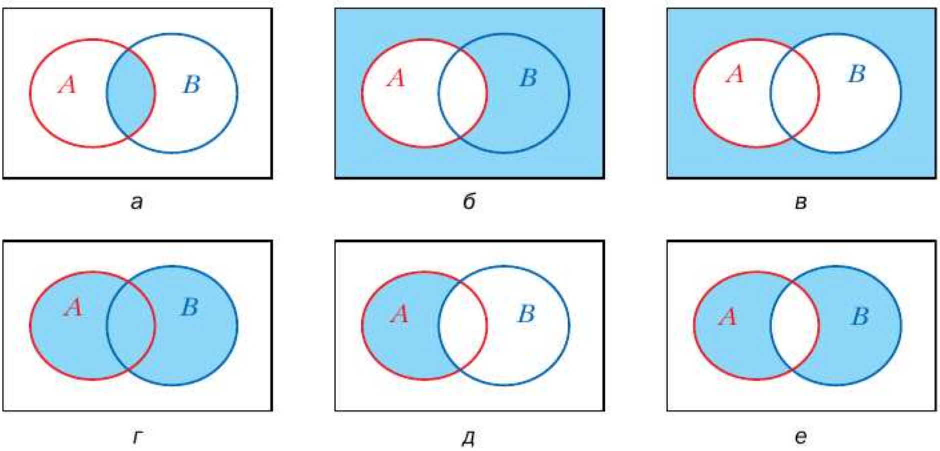
17.4. Диаграмма (рис. 17.8) иллюстрирует событие A, состоящее в том, что наугад выбранный ученик 11 «А» класса имеет светлые волосы. Каждая красная точка на диаграмме представляет ученика. Найдите вероятность того, что наугад выбранный ученик 11 «А» класса: 1) имеет светлые волосы; 2) имеет тёмные волосы.

Рис. 17.8



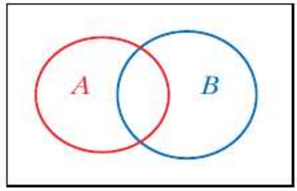
17.5. Среди членов спортклуба выбирают наугад одного человека. Событие A состоит в том, что выбранный человек занимается в тренажёрном зале, а событие B – в том, что он плавает в бассейне. В чём состоит событие, проиллюстрированное на диаграмме (рис. 17.9)?

Рис. 17.9



17.6. На диаграмме (рис. 17.10) проиллюстрированы события A и B. Перерисуйте диаграмму в тетрадь и заштрихуйте ту область, которая иллюстрирует следующее:
1) произошло событие A, но не произошло событие B;
2) произошло событие B, но не произошло событие A;
3) не произошло ни событие A, ни событие B.

Рис. 17.10



17.7. Опыт состоит в том, что из множества $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ наугад выбирают один элемент. В этом опыте рассматривают следующие события:
A – выбранный элемент принадлежит множеству $\{1, 2\}$;
B – выбранный элемент принадлежит множеству $\{1, 3, 5\}$;
C – выбранный элемент принадлежит множеству $\{4, 5\}$.
Какой элемент мог быть выбран, если произошло событие:
1) $A \cap B$;
2) $B \cup C$;
3) $\overline{B}$;
4) $\overline{A} \cap C$;
5) $A \cup B \cup C$?

17.8. Опыт состоит в том, что наугад выбирают действительное число. В этом опыте рассматривают следующие события:
A – выбранное число принадлежит промежутку $[0; 2]$;
B – выбранное число принадлежит промежутку $(0; +\infty)$;
C – выбранное число принадлежит промежутку $[1; 3)$.
С помощью числовых промежутков запишите множество тех чисел, которые могли быть выбраны, если произошло событие:
1) $A \cup B$;
2) $A \cap C$;
3) $\overline{B}$;
4) $A \cap \overline{C}$;
5) $A \cap B \cap C$.

17.9. Перед футбольным матчем «Локомотив» – «Зенит» болельщики обсуждают такие события:
A – «команда „Зенит“ не проиграет»;
B – «матч закончится вничью со счётом 1:1»;
C – «команда „Локомотив“ победит со счётом 3:0»;
D – «в матче забьют не более двух голов».
Какой счёт может быть на табло после окончания матча, если произойдёт событие:
1) $A \cap B$;
2) $B \cup C$;
3) $A \cap D$;
4) $\overline{A \cup C}$;
5) $\overline{C} \cup \overline{D}$?

17.10. В результате жеребьёвки спортсмен на старте получает повязку с номером от 1 до 10. В этом испытании рассматривают такие события:

A — «номер спортсмена больше 6»;

B — «номер спортсмена чётный»;

C — «номер спортсмена делится на 5»;

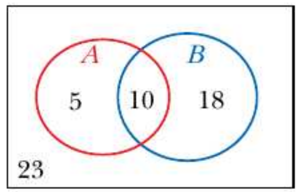
D — «номер спортсмена является простым числом».

Какие номера может получить спортсмен, если произойдёт событие:

1) $\overline{A}$;
2) $B \cup D$;
3) $A \cap D$;
4) $A \cup \overline{C}$;
5) $A \cap B \cap C$;
6) $B \cup C \cup D$?

17.11. Событие A состоит в том, что наугад выбранный посетитель бассейна умеет плавать брассом, а событие B — в том, что он умеет плавать на спине. На диаграмме (рис. 17.11) указано количество людей в той или иной группе посетителей бассейна. Найдите вероятность события:

Рис. 17.11



1) A;
2) $\overline{B}$;
3) $A \cup B$;
4) $\overline{A} \cap \overline{B}$.

17.12. Используя условие предыдущей задачи, найдите вероятность события:

1) B;
2) $\overline{A}$;
3) $A \cap B$;
4) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

17.13. Стрелок делает два выстрела — сначала в большую мишень, а потом в маленькую. Вероятность того, что он попадёт только в большую мишень, равна 18%. Вероятность того, что он попадёт только в маленькую мишень, равна 8%. Найдите вероятность того, что выстрелив дважды, стрелок попадёт в мишень только один раз.

17.14. Ученики 10 и 11 классов решили сыграть между собой один матч в футбол и один матч в баскетбол. Вероятность того, что команда 10 классов выиграет у команды 11 классов только в футбол, равна 33%, только в баскетбол — 18%. Какова вероятность того, что команда 10 классов выиграет ровно один из двух сыгранных матчей?

17.15. От остановки в центр города можно добраться автобусом, троллейбусом и трамваем. Человек, едущий в центр, садится на тот вид транспорта, который придёт на остановку первым. Известно, что автобус приходит первым с вероятностью $\frac{4}{7}$, троллейбус — $\frac{2}{7}$, трамвай — $\frac{1}{7}$. Какова вероятность того, что человек отправится в центр не на трамвае?

17.16. В столовой предлагается три первых блюда – солянка, борщ и уха. Среди покупающих первое блюдо солянку выбирает каждый второй, борщ – каждый третий, а уху – каждый шестой человек. Какова вероятность того, что очередной посетитель, купивший первое блюдо, не выберет борщ?

17.17. Игральный кубик подбросили дважды. Событие A состоит в том, что сумма очков, выпавших на кубике, чётная, а событие B – в том, что по крайней мере один раз выпала единица. Найдите вероятность события:

1) $\overline{A}$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup B$.

17.18. Правильную треугольную пирамиду, грани которой окрашены в жёлтый, зелёный, красный и синий цвета, подбросили дважды. Пусть событие A состоит в том, что оба раза пирамида упала на одну и ту же грань, а событие B – в том, что в первый раз пирамида упала на жёлтую или на зелёную грань. Найдите вероятность события:

1) $\overline{A}$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup B$.

17.19. Среди абитуриентов механико-математического факультета университета есть призёры областных олимпиад и отличники. Вероятность встретить среди абитуриентов призёра областной олимпиады равна 20%, отличника – 35%, а призёра областной олимпиады или отличника – 43%. Какова вероятность встретить среди абитуриентов призёра областной олимпиады и отличника в одном лице?

17.20. Выпускник университета хочет работать в банке или в страховой компании. Побывав в этих учреждениях на собеседованиях, он оценивает вероятность быть принятым на работу в банк в 0,5, а в страховую компанию – в 0,6. Кроме того, он считает, что ему поступит предложение из обоих мест с вероятностью 0,4. Как он должен оценить вероятность быть принятым на работу?

17.21. Международные финансовые аналитики провели исследование и выяснили, что вероятность возрастания курса евро к доллару в следующем месяце составляет 0,55, вероятность возрастания курса швейцарского франка к доллару – 0,35, а вероятность того, что вырастут курсы обеих европейских валют к доллару, – 0,23. Найдите вероятность того, что вырастет курс, по крайней мере, одной европейской валюты.

17.22. Мужчины дарят женщинам подарки на 8 Марта. Вероятность того, что женщина получит в подарок цветы и не получит в подарок духи, равна 20%, духи без цветов – 10%, цветы и духи вместе – 15%. Какова вероятность того, что женщина получит на 8 Марта в подарок:

1) цветы; 2) духи?

17.23. Гидрометцентр прогнозирует температуру и влажность воздуха на ближайшие дни. Вероятность того, что влажность повысится до 100% или температура понизится на 5 °С, равна 85%, а вероятность того, что и влажность повысится до 100% и температура понизится на 5 °С, – 40%. Какова вероятность того, что в ближайшие дни температура воздуха понизится на 5 °С, если вероятность того, что влажность повысится до 100%, равна 70%?

17.24. В неисправном светильнике поменяли на новые выключатель и лампочку. Вероятность того, что лампочка проработает не менее года, составляет 0,96, а выключатель – 0,98. Кроме того, известно, что с вероятностью 0,01 в течение года могут выйти из строя и лампочка, и выключатель. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить:

1) только лампочку;

2) только выключатель;

3) лампочку или выключатель;

4) ровно один из двух новых элементов светильника?

17.25. Петя и Андрей пришли на озеро ловить рыбу. Вероятность того, что первая пойманная рыба окажется карпом, у Пети равна $\frac{3}{5}$, а у Андрея – $\frac{1}{2}$. Вероятность того, что первая пойманная рыба окажется карпом хотя бы у одного из мальчиков, равна $\frac{7}{10}$. Какова вероятность того, что первая пойманная рыба окажется карпом:

1) и у Пети, и у Андрея;

2) только у Пети;

3) только у Андрея;

4) только у одного из мальчиков?

Готовимся к изучению новой темы

17.26. Монету подбрасывают дважды. Какова вероятность того, что при втором подбрасывании выпадет герб, если при первом подбрасывании выпало число?

17.27. Кубик подбрасывают один раз. Событие A состоит в том, что на кубике выпадет чётное число.

1) Найдите вероятность события A.

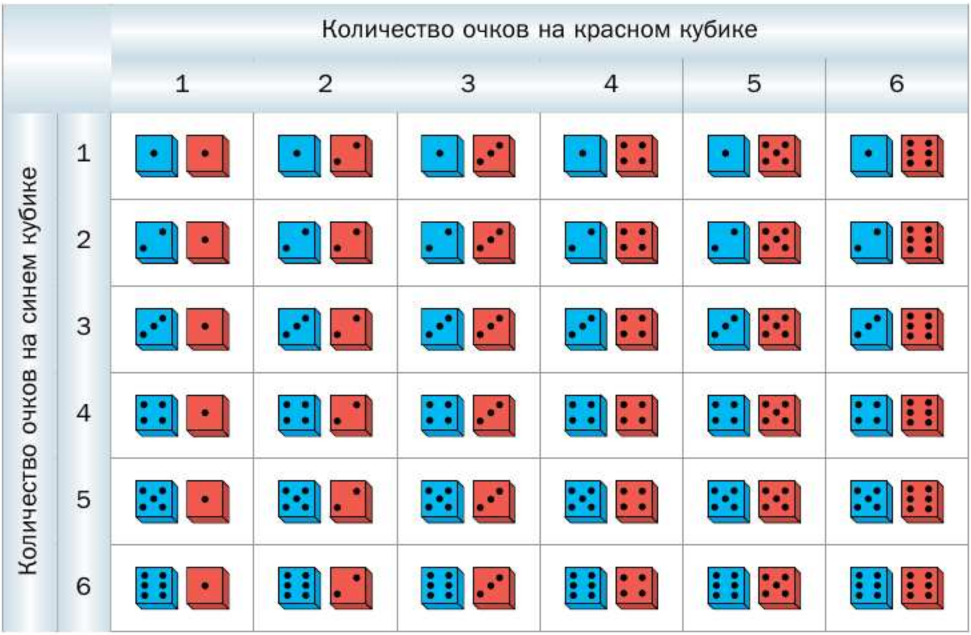
2) Найдите вероятность события A, если известно, что на кубике выпало нечётное число.

3) Найдите вероятность события A, если известно, что на кубике выпала двойка.

§ 18. Зависимые и независимые события

Рассмотрим опыт, состоящий в том, что вначале подбрасывают синий игральный кубик, а затем – красный. На рисунке 18.1 показаны все 36 равновозможных результатов этого испытания. Пусть событие A состоит в том, что сумма чисел, выпавших на кубиках, равна 12. Событие A происходит только в одном случае – когда оба раза выпадут шестёрки. Поэтому $P(A) = \frac{1}{36}$.

Рис. 18.1



Поставим такой вопрос. Изменится ли вероятность события A, если известно, что на синем кубике выпала шестёрка (состоялось событие B)? Здравый смысл подсказывает, что вероятность события A должна измениться. Действительно, если при первом подбрасывании выпала шестёрка, то для наступления события A при втором подбрасывании тоже должна выпасть шестёрка. Вероятность выпадения шестёрки на красном кубике равна $\frac{1}{6}$. Поэтому вероятность события A при условии выпадения шестёрки на синем кубике равна $\frac{1}{6}$.

Вообще, если речь идёт о вероятности события A при условии, что произошло событие B, то такую вероятность называют **условной вероятностью** и обозначают $P_B(A)$.

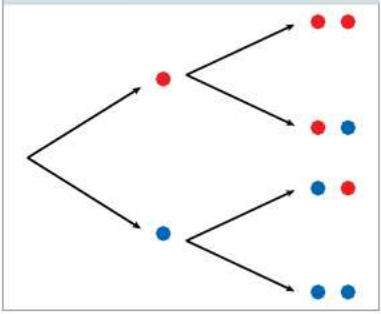
Таким образом, в рассмотренном опыте $P_B(A) = \frac{1}{6}$.

<u>**Пример 1.**</u> Из коробки, в которой лежат два красных и четыре синих шара, наугад берут сначала один шар, а потом ещё один. Событие A состоит в том, что первый взятый шар окажется красным, а событие B – в том, что второй взятый шар также окажется красным. Вычислите $P_A(B)$.

Решение. Если произошло событие A, то первый взятый шар – красный. Это значит, что перед вытягиванием второго шара в коробке находятся один красный шар и четыре синих. Поэтому вероятность того, что в этой ситуации второй взятый шар также окажется красным, равна $\frac{1}{5}$, то есть $P_A(B) = \frac{1}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{5}$. ◄

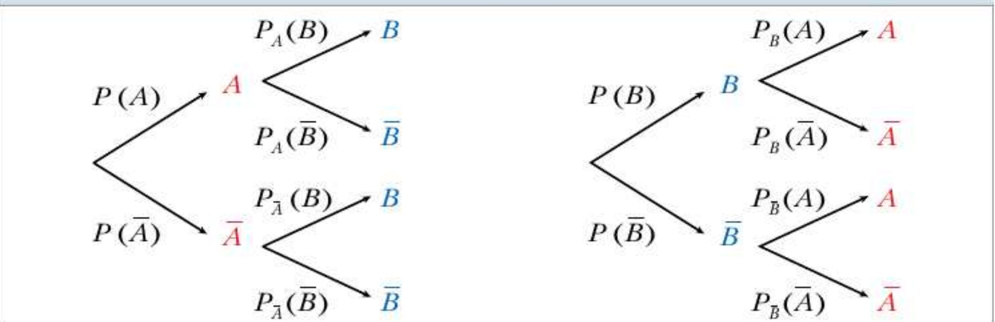
Рис. 18.2



Решение задач на вычисление условных вероятностей удобно иллюстрировать с помощью древовидной схемы – **дендрограммы** (от греч. *дендрон* – дерево и *грамма* – письмо). Например, опыт из примера 1 можно проиллюстрировать дендрограммой, на которой представлены все возможные результаты данного испытания (рис. 18.2).

Если в некотором испытании речь идёт о двух событиях A и B, то для иллюстрации можно использовать, например, дендрограммы, изображённые на рисунке 18.3.

Рис. 18.3



Возле стрелок дендрограммы удобно ставить значения вероятностей соответствующих событий. Например, расставив значения вероятностей на дендрограмме примера 1, получим схему, изображённую на рисунке 18.4. Правильность вычисления этих вероятностей предлагаем вам проверить самостоятельно.

Рис. 18.4

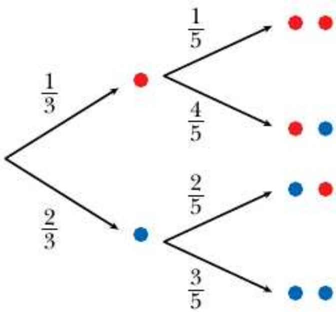
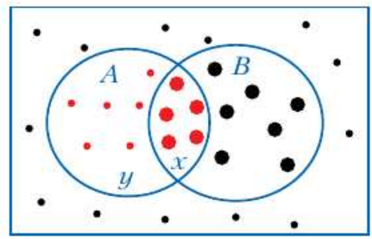


Рис. 18.5



Заметим, что стрелки, выходящие из одной точки, указывают на события, каждое из которых является дополнением другого. Поэтому сумма вероятностей событий, стоящих возле таких стрелок, равна 1.

Теорема 18.1

Пусть A и B — события некоторого испытания. Тогда

$$P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B).$$

Докажем эту теорему для частного случая, который описывается следующей вероятностной моделью.

Пусть в прямоугольнике отмечено n точек, часть из которых покрашены в красный цвет, а часть имеют больший размер, чем остальные (рис. 18.5).

Количество больших красных точек обозначим через x, маленьких красных – через y, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Испытание состоит в том, что из отмеченных n точек прямоугольника наугад выбирают одну. В этом испытании событие A состоит в том, что выбранная точка окажется красной, а событие B – в том, что выбранная точка окажется большой.

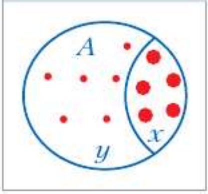
Поскольку все исходы в данном опыте равновозможны, то

$$P(A) = \frac{x + y}{n}.$$

Событие $A \cap B$ состоит в том, что выбранная точка окажется красной и большой одновременно. Поэтому $P(A \cap B) = \frac{x}{n}$.

Вычислим вероятность $P_A(B)$. Если произошло событие A, то есть выбрана красная точка, то это означает, что из n равновозможных исходов опыта имеет смысл рассматривать только $x + y$ красных точек (рис. 18.6).

Рис. 18.6



Из этих $x + y$ равновозможных исходов событию B благоприятствуют x результатов. Поэтому $P_A(B) = \frac{x}{x+y}$.

Таким образом, установлено, что

$$P(A)\,P_A(B) = \frac{x+y}{n} \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{x}{n} = P(A \cap B). \blacktriangleleft$$

<u>Пример 2.</u> Известно, что озимая рожь успешно переносит зиму с вероятностью $\frac{9}{10}$. Если озимая рожь успешно перенесёт зиму, то вероятность того, что и озимая пшеница успешно перезимует, равна $\frac{13}{15}$. Если же озимую рожь весной придётся пересевать, то вероятность того, что придётся пересевать и озимую пшеницу, равна $\frac{4}{5}$.

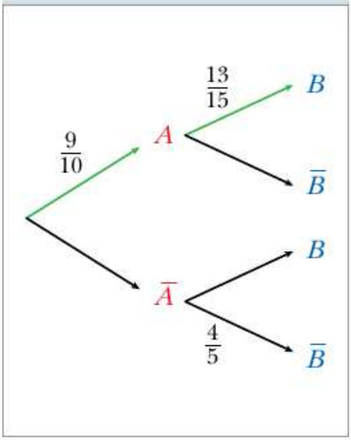
Найдите вероятность того, что:

1) и рожь, и пшеница успешно перезимуют;

2) пшеница успешно перезимует, а рожь придётся пересевать;

3) пшеница успешно перезимует.

Рис. 18.7



Решение. 1) Обозначим через A и B события, состоящие в том, что успешно перенесут зиму рожь и пшеница соответственно. Тогда данные задачи можно проиллюстрировать дендрограммой, изображённой на рисунке 18.7.

Рожь и пшеница успешно перезимуют, если произойдут и событие A, и событие B (зелёные стрелки на дендрограмме). Учитывая формулу теоремы 18.1, получаем, что

$$P(A \cap B) = P(A)\,P_A(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{15} = \frac{39}{50} = 78\%.$$

2) Учитывая формулу вероятности дополнения события $P(\overline{X}) = 1 - P(X)$, расставим вероятности над всеми стрелками дендрограммы (рис. 18.8).

Пшеница успешно перезимует, а рожь придётся пересевать, если произойдут и событие B, и событие $\overline{A}$ (жёлтые стрелки на дендрограмме). Учитывая формулу теоремы 18.1, получаем, что

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})\, P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} = 2\%.$$

3) Пшеница успешно перезимует (событие B) при одном из двух вариантов — рожь успешно перезимует (событие A) или рожь придётся пересевать (событие $\overline{A}$). Эти два варианта проиллюстрированы на дендрограмме (рис. 18.9) зелёной и оранжевой стрелками.

Рис. 18.8

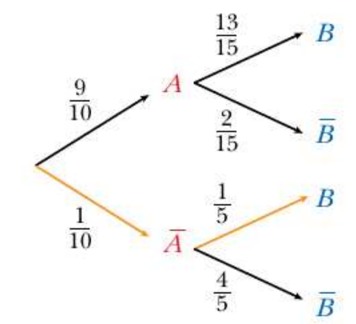
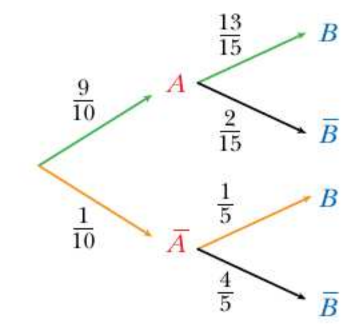


Рис. 18.9



Это означает, что событие B является объединением двух событий: $A \cap B$ (зелёные стрелки) и $\overline{A} \cap B$ (оранжевые стрелки). Поскольку события A и $\overline{A}$ являются несовместными, то события $A \cap B$ и $\overline{A} \cap B$ также являются несовместными. Поэтому

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 78\% + 2\% = 80\%.$$

Ответ: 1) 78%; 2) 2%; 3) 80%.◄

Определение

Пусть A и B — события некоторого испытания. Если вероятность события A не изменяется от того, произошло ли событие B, а вероятность события B не изменяется от того, произошло ли событие A, то события A и B называют независимыми.

Например, пусть игральный кубик подбрасывают дважды и при первом броске выпала шестёрка (событие A). Сообщение о том, что произошло событие A, не изменяет шансы выпадения при втором подбрасывании кубика, например, тройки (событие B). Точно так же информация о том, что при втором подбрасывании кубика выпала тройка, не изменяет вероятности того, что при первом подбрасывании кубика выпала шестёрка. Следовательно, события A и B являются независимыми.

Другими словами, ***события A и B независимы в том и только в том случае, когда*** $\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$ ***и*** $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$.

Если одно из равенств $P_A(B) = P(B)$ или $P_B(A) = P(A)$ не выполняется, то события A и B называют **зависимыми**. Например, пусть игральный кубик подбрасывают один раз. Если событие A состоит в том, что на игральном кубике выпало чётное число, а событие B — в том, что на игральном кубике выпала двойка, то $P(B) = \frac{1}{6}$, а $P_A(B) = \frac{1}{3}$. Поэтому $P_A(B) \neq$ $\neq P(B)$, то есть такие события A и B являются зависимыми.

Теорема 18.2

Если события A и B некоторого испытания являются независимыми, то

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)\,P(B).}$$

Доказательство

Если события A и B независимы, то $P_A(B) = P(B)$. Используя равенство теоремы 18.1, получаем

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B). \blacktriangleleft$$

Понятие независимости событий можно обобщить для трёх и большего количества событий. В таком случае также имеет место утверждение: ***если события некоторого испытания являются независимыми, то вероятность пересечения этих событий равна произведению их вероятностей***[1].

<u>**Пример 3.**</u> Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что из трёх последовательных независимых выстрелов стрелок попадёт в мишень только с третьего раза.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что стрелок не попадёт в мишень при первом выстреле, событие B — в том, что он не попадёт в мишень при втором выстреле, а событие C — в том, что он попадёт в мишень при третьем выстреле. Тогда $P(A) = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}1$; $P(C) = 0{,}9$.

---

[1] Иногда это свойство используют в качестве определения независимых (независимых в совокупности) событий.

Стрелок попадёт в мишень только с третьего раза, если произойдут и событие A, и событие B, и событие C, то есть произойдёт событие $A \cap B \cap C$. Вычислим $P(A \cap B \cap C)$.

Поскольку выстрелы производятся независимо один от другого, то события A, B и C будут независимыми. Поэтому

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}009.$$

Ответ: 0,009. ◄

1. Что называют условной вероятностью?
2. Какую диаграмму удобно использовать для иллюстрации задач на вычисление условных вероятностей?
3. Какие два события называют независимыми?
4. Какие два события называют зависимыми?
5. Что можно сказать о событиях A и B, если $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$?
6. Как найти вероятность пересечения независимых событий?

Упражнения

18.1. Среди учеников вашего класса наугад выбрали одного. Найдите вероятность того, что выбранный ученик имеет отметку «5» по алгебре, если известно, что выбрали мальчика.

18.2. В таблице представлена информация о возрасте животных питомника. Из всех животных питомника наугад выбрали одно. Найдите вероятность того, что выбранное животное старше года, если известно, что выбрали собаку.

Возраст	Собаки	Кошки
До года	5	4
От года до двух лет	3	8
Старше двух лет	12	18

18.3. В коробке лежат несколько шаров одного цвета: либо все красные, либо все синие. Вероятность того, что в коробке лежат красные шары, равна $\frac{1}{2}$. Из коробки наугад последовательно берут два шара.

1) Какова вероятность того, что второй вытянутый шар окажется красным?

2) Какова вероятность того, что второй вытянутый шар окажется красным, если первый вытянутый шар также оказался красным?

3) Какова вероятность того, что второй вытянутый шар окажется красным, если первый вытянутый шар оказался синим?

18.4. Монету подбрасывают 3 раза. Найдите вероятность того, что при последнем подбрасывании выпадет герб, если в каждом из первых двух подбрасываний выпало число.

18.5. В коробке лежат ручки синего и красного цветов. Из коробки наугад последовательно вытягивают две ручки. Составьте дендрограмму этого испытания.

18.6. В одном ящике лежат шары трёх цветов: красного, синего и белого, а в другом двух цветов: зелёного и чёрного. Из каждой коробки наугад выбирают по одному шару. Составьте дендрограмму этого испытания.

18.7. Человек ожидает на остановке автобус или троллейбус и заходит в тот вид транспорта, который придёт первым. Находясь в транспорте, человек садится на сиденье возле окна, если есть такое свободное место. Составьте дендрограмму этого испытания.

18.8. Известно, что $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ и $P(A \cup B) = 0{,}6$. Найдите:

1) $P(A \cap B)$; 2) $P_A(B)$; 3) $P_B(A)$.

18.9. Известно, что $P_A(B) = 0{,}5$, $P_B(A) = 0{,}75$ и $P(A \cap B) = 0{,}25$. Найдите:

1) $P(A)$; 2) $P(B)$; 3) $P(A \cup B)$.

18.10. На собрании присутствуют 19 человек, из которых 12 женщин и 7 мужчин. Для подсчёта результатов голосования предлагается выбрать счётную комиссию из трёх человек. Членов счётной комиссии выбирают последовательно путём жеребьёвки. Известно, что первыми двумя членами комиссии оказались мужчины. Найдите вероятность того, что третьим из выбранных членов счётной комиссии окажется женщина. Составьте дендрограмму этого опыта.

18.11. Из коробки, в которой лежат 20 синих и 15 красных шаров, наугад берут сначала один шар, а потом ещё один. Известно, что первый шар был синим. Вычислите вероятность того, что второй шар окажется красным. Составьте дендрограмму этого опыта.

18.12. После путешествия в Европу у путешественника остались фотографии 10 пейзажей и 15 портретов из Франции и 6 пейзажей и 14 портретов из Италии. Путешественник выбирает наугад одну фотографию. Какова вероятность того, что это будет пейзаж, если известно, что выбранная фотография не является портретом из Франции?

18.13. В букинистическом магазине на полке с детективами стоят 20 книг, из которых 4 в твёрдой обложке и 16 в мягкой, а на полке со сборниками поэзии — 40 книг, из которых 10 в твёрдой обложке и

30 в мягкой. Посетитель магазина берёт наугад одну книгу с этих полок. Какова вероятность того, что это будет сборник поэзии, если известно, что выбранная книга не является детективом в мягкой обложке?

18.14. При обстреле смеси изотопов урана пучком нейтронов вероятность начала управляемой ядерной цепной реакции составляет 40%. Какова вероятность того, что из двух таких независимых опытов только во втором начнётся управляемая ядерная цепная реакция?

18.15. Согласно демографическим исследованиям вероятность того, что новорождённый ребёнок окажется мальчиком, равна 0,512. Найдите вероятность того, что в семье, планирующей иметь троих детей, дети родятся в последовательности: мальчик, девочка, мальчик.

18.16. Стрелок попадает в мишень с вероятностью p. Опыт состоит в том, что стрелок стреляет до тех пор, пока не попадёт в мишень. Найдите вероятность того, что ему придётся стрелять 6 раз.

18.17. В некачественной партии деталей вероятность того, что взятая наугад деталь окажется бракованной, составляет 0,2. Контролёр проверяет детали до тех пор, пока не выявит первую бракованную. Найдите вероятность того, что ему придётся проверить 8 деталей.

18.18. На проспекте установлено два светофора. Вероятность зафиксировать зелёный свет на первом светофоре равна 0,8, а на втором светофоре — 0,9. Вероятность зафиксировать зелёный свет одновременно на обоих светофорах равна 0,7. Найдите вероятность:

1) зафиксировать зелёный свет на первом светофоре при условии, что на втором светофоре также горит зелёный свет;

2) зафиксировать зелёный свет на втором светофоре при условии, что на первом светофоре также горит зелёный свет;

3) зафиксировать сигнал, запрещающий движение, на первом светофоре при условии, что на втором светофоре горит зелёный свет;

4) зафиксировать зелёный свет на втором светофоре при условии, что на первом светофоре горит сигнал, запрещающий движение.

18.19. Пиццерия предлагает по желанию посетителя добавлять в пиццу бекон и/или грибы. Вероятность того, что посетитель попросит добавить бекон, равна 0,6, а грибы — 0,7. Вероятность же того, что посетитель попросит добавить в пиццу бекон или грибы, равна 0,8. Найдите вероятность того, что:

1) посетитель попросит добавить бекон, если известно, что он уже попросил добавить грибы;

2) посетитель попросит добавить грибы, если известно, что он не любит бекон.

18.20. В коробке лежат 24 синих и 16 красных ручек. Ученик выбирает наугад ручку из коробки и этой ручкой пишет число на бумаге. Электронный сканер распознаёт число, написанное синей ручкой, с вероятностью 90%, а число, написанное красной ручкой, – с вероятностью 70%. Составьте дендрограмму этого опыта и найдите вероятность того, что написанное число будет распознано.

18.21. На соревнованиях по метанию копья последнему спортсмену осталось выполнить последнюю попытку. Если во время броска ветер будет попутный, то спортсмен сможет победить с вероятностью 0,42, если же ветер будет встречный – то с вероятностью 0,35. Составьте дендрограмму этого опыта и найдите вероятность победы спортсмена, если вероятность того, что во время броска ветер будет попутным, равна 0,6.

18.22. Два завода производят зонты. Первый завод производит 30%, а второй 70% всех зонтов. Вероятность купить бракованный зонт равна 1%, если он изготовлен на первом заводе, и равна 3%, если на втором. Найдите вероятность того, что наугад выбранный зонт окажется бракованным.

18.23. Из коробки, в которой лежат 10 синих и 18 красных шаров, наугад берут сначала один шар, а потом ещё один. Вычислите вероятность того, что первый взятый шар синий, при условии, что второй шар оказался красным.

18.24. Из коробки, в которой лежат 2 синих и 3 красных шара, наугад берут сначала один шар, а потом ещё один. Вычислите вероятность того, что взятые шары одного цвета, если среди взятых шаров есть красный.

18.25. Пусть A и B – независимые события некоторого испытания с ненулевыми вероятностями. Могут ли события A и B быть несовместными?

18.26. Пусть A и B – несовместные события некоторого испытания с ненулевыми вероятностями. Могут ли события A и B быть независимыми?

18.27. Андрей попадает в мишень с вероятностью 0,4, Сергей – 0,5, а Пётр – 0,7. Все трое делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что:

1) попадут все юноши;
2) ни один из юношей не попадёт;
3) только Андрей попадёт;
4) ровно один из юношей попадёт;
5) не попадёт только Пётр;
6) только один из юношей не попадёт;
7) по крайней мере двое юношей попадут?

18.28. Среди лотерейных билетов 10% выигрышных. Игрок приобрёл 3 билета. Какова вероятность того, что среди купленных билетов:

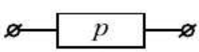
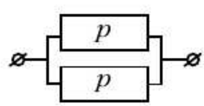
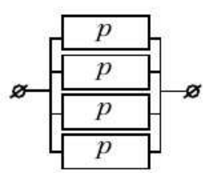
1) не будет выигрышных;
2) будет ровно один выигрышный;
3) будет ровно два выигрышных;
4) будут все выигрышные?

18.29. Вероятность того, что футбольный матч между командами A и B завершится вничью, составляет 50%. Вероятность победы команды A равна 20%, а команды B — 30%. Команды A и B планируют провести серию из четырёх матчей между собой. Какова вероятность того, что:

1) все матчи закончатся вничью;
2) команда B не проиграет ни одного матча;
3) команда A победит только во втором матче;
4) команда A победит только один раз в серии матчей?

18.30. Электрический блок (рис. 18.10) работает безотказно в течение года с вероятностью p. Для увеличения надёжности электрический блок дублируют ещё одним таким же блоком так, что полученная система работает, когда работает, по крайней мере, один из блоков (рис. 18.11). Какова вероятность безотказной работы системы в течение года, если поломка каждого электрического блока происходит независимо от работы другого блока?

18.31. Электрический блок (см. рис. 18.10) работает безотказно в течение года с вероятностью p. Для увеличения надёжности электрический блок дублируют ещё тремя такими же блоками так, что полученная система работает, когда работает, по крайней мере, один из блоков (рис. 18.12). Какова вероятность безотказной работы системы в течение года, если поломка каждого электрического блока происходит независимо от работы других блоков?

Рис. 18.10	Рис. 18.11	Рис. 18.12
		

Готовимся к изучению новой темы

18.32. Запишите третий член разложения выражения $(p + q)^5$ по формуле бинома Ньютона. В полученное выражение подставьте $1 - p$ вместо q.

18.33. Сколько пятибуквенных «слов» можно записать, используя в каждом слове 3 буквы «У» и 2 буквы «Н»?

18.34. Стрелок делает 5 последовательных выстрелов (каждый выстрел не зависит от результатов остальных выстрелов). Какова вероятность того, что стрелок попадёт в мишень только при первых трёх выстрелах, если он попадает в мишень с вероятностью p?

§ 19. Схема Бернулли

В теории вероятностей разные на вид задачи могут быть решены одним и тем же способом. В таких случаях говорят, что эти задачи описывает одна и та же **вероятностная модель**. Одна из самых важных вероятностных моделей получила название «схема Бернулли».

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Вероятность попадания мяча в корзину при штрафном броске баскетболиста равна p. Баскетболист проводит серию из трёх штрафных бросков (каждый из бросков выполняется независимо от результатов других). Какова вероятность того, что баскетболист попадёт в корзину только:

1) при первом и втором бросках;
2) при втором и третьем бросках;
3) два раза из трёх бросков?

Решение. 1) Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что баскетболист попадёт в корзину соответственно при первом, втором или третьем броске.

Тогда

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = p,$$

$$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = 1 - p.$$

Баскетболист попадёт в корзину только при первом и втором бросках тогда и только тогда, когда произойдут и событие A_1, и событие A_2, а также не произойдёт событие A_3. Поэтому если обозначить через X событие, состоящее в том, что баскетболист попадёт в корзину только при первом и втором бросках, то $X = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$. Поскольку каждый из бросков выполняется независимо от результатов других бросков, то можно записать:

$$P(X) = P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(\bar{A}_3) = p^2(1-p).$$

Приведём менее формальный вариант только что изложенного решения.

Событие, состоящее в том, что баскетболист попадёт в корзину только при первом и втором бросках, закодируем так: «+ + –». По условию задачи вероятность забросить мяч в корзину (вероятность «плюса») равна p, а вероятность промаха (вероятность «минуса») равна $1 - p$. Поскольку броски выполняются независимо, то вероятность события «+ + –» можно найти как произведение вероятностей: $p \cdot p \cdot (1 - p) = p^2(1 - p)$.

2) Закодируем событие, состоящее в том, что баскетболист попадёт в корзину только при втором и третьем бросках, так: «– + +». Рассуждая точно так же, как в пункте 1, получим, что вероятность этого события равна $(1 - p) \cdot p \cdot p = p^2(1 - p)$.

3) Баскетболист попадёт в корзину два раза из трёх бросков, если произойдёт одно из следующих трёх событий: «+ + –», или «+ – +», или «– + +». Поскольку вероятность каждого из этих событий равна $p^2(1 - p)$ и эти события несовместны, то вероятность того, что баскетболист попадёт ровно два раза из трёх бросков, равна $3p^2(1 - p)$. ◄

Обобщим задачу, рассмотренную в примере 1.

В некотором испытании (например, при броске мяча в корзину) с двумя возможными исходами «У» (успех) и «Н» (неудача) вероятность исхода «У» равна p. Пусть это испытание повторяют n раз, и каждое испытание выполняется независимо от результатов других испытаний. Такую серию испытаний называют **схемой Бернулли с параметрами n и p**.

Перейдём к более подробному изучению схемы Бернулли. Найдём вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p из n проведённых испытаний ровно m завершатся исходом «У» (успех), а остальные $n - m$ испытаний завершатся исходом «Н» (неудача).

Будем рассуждать аналогично решению примера 1. Сначала найдём вероятность того, что первые m испытаний закончатся исходом «У», а оставшиеся $n - m$ испытаний – исходом «Н». Это событие закодируем так: «$\underbrace{\text{У У... У}}_{m \text{ букв}}\,\underbrace{\text{Н Н ... Н}}_{(n-m) \text{ букв}}$». Поскольку испытания выполняются независимо, то вероятность события «$\underbrace{\text{У У... У}}_{m \text{ букв}}\,\underbrace{\text{Н Н ... Н}}_{(n-m) \text{ букв}}$» равна

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{m \text{ множителей}} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{(n-m) \text{ множителей}} = p^m (1-p)^{n-m}.$$

Любое другое событие, в котором m испытаний закончатся исходом «У», а $n - m$ испытаний – исходом «Н», также можно закодировать набором букв, составленным из m букв «У» и $n - m$ букв «Н». Поэтому его вероятность также равна $p^m(1-p)^{n-m}$. Следовательно, вероятность того, что из n проведённых испытаний ровно m завершатся исходом «У», равна

$$k \cdot p^m(1-p)^{n-m},$$

где k – количество событий, составленных из m букв «У» и $n - m$ букв «Н».

Осталось найти число k. Поскольку число k равно числу способов расставить m букв «У» в последовательности из n букв, то $k = C_n^m$.

Таким образом, ***вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p ровно m испытаний завершатся успешным исходом, равна***

$$\boxed{\boldsymbol{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}} \qquad (1)$$

Например, в схеме Бернулли с параметрами $n = 5$ и $p = \frac{1}{3}$ вероятность двух успешных исходов, то есть того, что $m = 2$, будет $C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-2} = \frac{80}{243}$.

Обратите внимание на то, что выражение $C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ напоминает слагаемое формулы бинома Ньютона. Это не случайно. Если обозначить $q = 1 - p$ и записать формулу бинома Ньютона для выражения $(q + p)^n$, то получим

$$(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1}p + C_n^2 q^{n-2}p^2 + \ldots + p^n. \qquad (2)$$

В правой части записанного равенства $(m + 1)$-е слагаемое имеет вид $C_n^m q^{n-m} p^m = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ и совпадает с выражением (1).

Пример 2. Фермерское хозяйство поставляет картофель в торговую сеть. Вероятность того, что наугад выбранная картофелина удовлетворяет требованиям торговой сети по массе и форме, равна 80%. Найдите вероятность того, что из 20 наугад выбранных картофелин ровно 16 удовлетворят требованиям торговой сети.

Решение. Условие задачи можно описать схемой Бернулли.

Действительно, при случайном выборе картофелины возможны два исхода:

«У» – выбранная картофелина удовлетворяет требованиям торговой сети (успешный исход);

«Н» – выбранная картофелина не удовлетворяет требованиям торговой сети (неудачный исход).

Вероятность исхода «У» по условию задачи равна $p = 0{,}8$. Данное испытание повторяют 20 раз, то есть $n = 20$, при этом необходимо выяснить вероятность того, что из этих 20 испытаний 16 завершатся исходом «У», то есть $m = 16$.

Используя формулу (1), получаем, что искомая вероятность равна

$$C_{20}^{16} \cdot 0{,}8^{16} \cdot 0{,}2^{4} \approx 0{,}22.$$ ◄

Пример 3. В некотором испытании случайное событие A происходит с вероятностью p. Испытание повторяют 10 раз (каждое из 10 испытаний проходит независимо от результатов остальных испытаний). Какова вероятность того, что в этих 10 испытаниях событие A произойдёт не менее двух раз?

Решение. Пусть X – событие, состоящее в том, что A произойдёт не менее двух раз. Тогда $\bar{X}$ – событие, состоящее в том, что A или произойдёт один раз, или вообще не произойдёт ни разу.

Вероятность того, что событие A произойдёт один раз, равна $C_{10}^{1}p(1-p)^9 = 10p(1-p)^9$.

Вероятность того, что событие A не произойдёт ни разу, равна $C_{10}^{0}p^0(1-p)^{10} = (1-p)^{10}$.

События, вероятности которых мы нашли, являются несовместными. Поэтому

$$P(\bar{X}) = 10p(1-p)^9 + (1-p)^{10} = (1-p)^9(1+9p).$$

Таким образом, $P(X) = 1-(1-p)^9(1+9p)$.

Ответ: $1-(1-p)^9(1+9p)$. ◄

В 9 классе вы ознакомились с понятием частоты события. Напомним, что если одно и то же испытание провести n раз и при этом событие A произошло n_A раз, то величину $\frac{n_A}{n}$ называют частотой события A в серии из n испытаний. Договоримся о каждом из этих n испытаний говорить, что оно закончилось исходом «У», если в нём произошло событие A. Если событие A не произошло, то будем считать, что испытание закончилось исходом «Н». Теперь ясно, что частота события описывается с помощью схемы Бернулли.

Вы знаете, что если количество испытаний неограниченно возрастает, то частоту события можно использовать как оценку вероятности этого события. Это важное свойство относят к так называемому **закону больших чисел** – ряду теорем, объясняющих поведение тех или иных вероятностных величин при большом количестве испытаний, в том числе в схеме Бернулли (подробнее о законе больших чисел вы можете узнать из рассказа на с. 176–180).

1. Что называют схемой Бернулли?
2. По какой формуле можно найти вероятность количества успешных исходов в схеме Бернулли?

Упражнения

19.1. Найдите вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p число успешных исходов равно m, если:

1) $n = 10$, $p = \frac{1}{4}$, $m = 2$;
2) $n = 8$, $p = 0{,}8$, $m = 8$;
3) $n = 5$, $p = 40\%$, $m = 3$.

19.2. Найдите вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p число успешных исходов равно m, если:

1) $n = 8$, $p = \frac{1}{2}$, $m = 3$;
2) $n = 5$, $p = 0{,}2$, $m = 0$;
3) $n = 4$, $p = 70\%$, $m = 2$.

19.3. Найдите числовые значения вероятностей того, что в схеме Бернулли с параметрами $n = 5$ и $p = 40\%$ число успешных исходов равно m при $m = 0$, $m = 1$, ..., $m = 5$. Сравните полученные значения и сделайте вывод о том, какое количество успешных исходов наиболее вероятно.

19.4. Какое количество успешных исходов наименее вероятно в схеме Бернулли с параметрами $n = 4$ и $p = 75\%$?

19.5. Какова вероятность того, что из 5 бросков игрального кубика шестёрка выпадет ровно 2 раза?

19.6. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность, что ровно 3 раза выпадет герб?

19.7. Стрелок попадает в мишень с вероятностью p. Найдите вероятность того, что из 9 выстрелов стрелок попадёт в мишень ровно 6 раз.

19.8. Вероятность того, что станок изготовит бракованную деталь, равна p. Какова вероятность того, что из 15 деталей ровно 2 будут бракованными?

19.9. Тест состоит из 8 вопросов. Вероятность того, что ученик правильно ответит на отдельно взятый вопрос, равна 80%. Найдите вероятность того, что ученик правильно ответит ровно на 5 вопросов.

19.10. В новой квартире вкрутили 10 новых лампочек. Вероятность того, что лампочка проработает не менее года, составляет 0,9. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить ровно 3 лампочки?

19.11. При игре в теннис Андрей в среднем выигрывает у Сергея 3 гейма из 5. Какова вероятность того, что из 6 геймов Андрей выиграет ровно 2 гейма?

19.12. Есть r ящиков, в каждом из которых лежат n чёрных и m белых шаров. Из каждого ящика наугад берут по одному шару. Какова вероятность того, что среди взятых шаров будет ровно k чёрных?

19.13. В r вагонов электрички случайным образом заходят n пассажиров. Какова вероятность того, что в первом вагоне окажется k из этих пассажиров?

19.14. В сборную команду России на Международной математической олимпиаде входят 6 человек. На основании выступлений российских школьников на олимпиадах прошлых лет был сделан вывод, что вероятность российского школьника получить золотую медаль на олимпиаде составляет около 65%. Оцените вероятность того, что на очередной Международной математической олимпиаде команда России завоюет не менее 5 золотых медалей.

19.15. Во время эпидемии гриппа вероятность того, что врач, контактирующий с больными, сам заболеет в течение недели, равна 0,08. Найдите вероятность того, что из 25 лечащих врачей поликлиники в течение недели заболеет не менее 2 человек.

19.16. Гроссмейстер проводит сеанс одновременной игры в шахматы на 40 досках. Вероятность того, что гроссмейстер выиграет каждую отдельную партию, равна 97%. Какова вероятность того, что в сеансе гроссмейстер выиграет не менее 38 партий?

Упражнения для повторения

19.17. Решите неравенство:

1) $|x^2 + 3x| < x + 4$;

2) $|x^2 + 3x| \geqslant 2 - x^2$.

19.18. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x^2 + 5x} < \sqrt{1 - x^2 + 4x}$;

2) $\sqrt{\dfrac{2x - 3}{4x - 1}} \geqslant \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$.

19.19. Решите неравенство:

1) $(x+10)\sqrt{x-4} \leqslant 0$;

2) $(x+1)\sqrt{x+4}\sqrt{x+7} \leqslant 0$.

§ 20. Случайные величины и их характеристики

При изучении теории вероятностей нам часто приходится иметь дело с испытаниями, результатами которых являются числа. Например, подбрасывая игральный кубик, фиксируют число, оказавшееся на верхней грани кубика; изучая качество продукции по случайно выбранной партии изделий, следят за количеством бракованных изделий в этой партии; планируя работу станции скорой помощи, выясняют количество вызовов, поступивших за определённый промежуток времени; оценивая вероятность события, вычисляют его частоту и так далее. В таких случаях говорят, что в данном испытании рассматривается **случайная величина** (число на кубике, количество бракованных изделий, количество вызовов, частота события и так далее).

Таким образом, **случайной величиной называют величину, значения которой определяются результатами испытания с числовыми исходами**. Такое название объясняется тем, что появление того или иного значения случайной величины нельзя предсказать заранее. Значение случайной величины зависит от результата эксперимента.

Случайные величины будем обозначать латинскими буквами x, y, ... Например, говорят: «случайная величина x равна числу, выпавшему при подбрасывании игрального кубика».

Все те значения, которые может принимать случайная величина, образуют **множество значений случайной величины**.

Пример 1. Случайная величина x равна количеству гербов, выпавших при подбрасывании двух монет. Найдите множество значений случайной величины x.

Решение. Поскольку в результате подбрасывания двух монет может выпасть или 0, или 1, или 2 герба, то множество $\{0, 1, 2\}$ является множеством значений случайной величины x. ◄

Обратите внимание, что существуют случайные величины с бесконечным множеством значений. Например, если случайная величина y равна расстоянию от центра круга радиуса R до точки этого круга, выбранной случайным образом, то множеством значений случайной величины y будет промежуток $[0; R]$.

Далее мы ограничимся изучением случайных величин с конечным множеством значений.

Для того чтобы сделать выводы об испытании в целом, одного множества значений случайной величины недостаточно. Важно установить, с какой вероятностью случайная величина принимает то или иное значение.

Обратимся ещё раз к опыту из примера 1. Если пронумеровать монеты, то данное испытание заканчивается одним из четырёх равновозможных результатов:

ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ,

где буквой «Г» обозначено выпадение на монете герба, а буквой «Ч» — числа.

Вероятность того, что при подбрасывании двух монет выпадет два герба, равна $\frac{1}{4}$. Случайная величина x равна количеству гербов, выпавших при подбрасывании двух монет. Поэтому можно утверждать, что случайная величина x принимает значение, равное 2, с вероятностью $\frac{1}{4}$. Этот факт принято записывать так: $P(x = 2) = \frac{1}{4}$. Рассуждая аналогично, получаем: $P(x = 0) = \frac{1}{4}$, $P(x = 1) = \frac{2}{4}$.

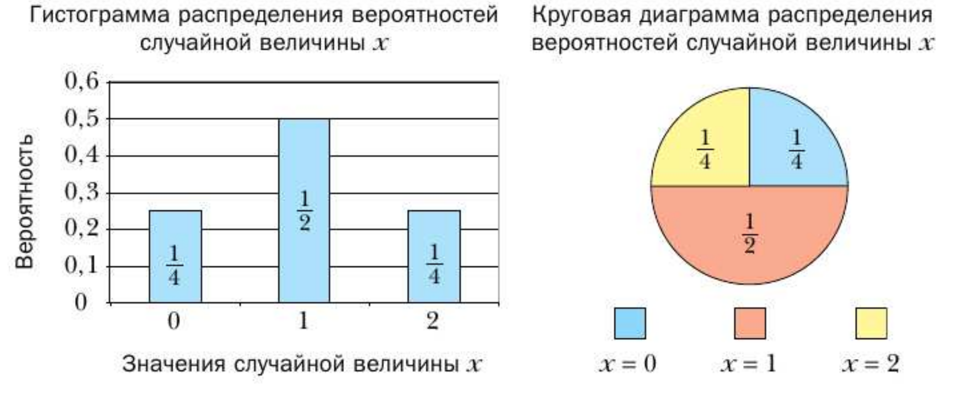
Соответствие между значениями случайной величины и вероятностями, с которыми она их принимает: $P(x = 0) = \frac{1}{4}$, $P(x = 1) = \frac{2}{4}$, $P(x = 2) = \frac{1}{4}$, называют **распределением вероятностей** случайной величины x. Распределение вероятностей случайной величины часто представляют в виде таблицы:

Значение x	0	1	2
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Отметим, что *сумма чисел, записанных во второй строке таблицы распределения вероятностей случайной величины, всегда равна 1*. Это следует из того, что случайная величина гарантированно принимает одно из значений, указанных в первой строке таблицы.

Распределение вероятностей случайной величины можно иллюстрировать с помощью диаграмм различных видов. Например, распределение вероятностей описанной выше случайной величины x можно представить

Рис. 20.1



в виде столбчатой диаграммы (гистограммы) и в виде круговой диаграммы (рис. 20.1).

Пример 2. Распределение вероятностей случайной величины z задано таблицей, в которой пропущено одно значение:

Значение z	1	3	7	8	10
Вероятность	0,1	0,35	0,25		0,15

Найдите вероятности:

1) $P(z = 4)$; 3) $P(9 \leqslant z < 12)$;
2) $P(z < 6)$; 4) $P(z = 8)$.

Решение. 1) Запись $P(z = 4)$ означает вероятность события, состоящего в том, что случайная величина z равна 4. Поскольку в первой строке таблицы распределения вероятностей отсутствует число 4, то это означает, что случайная величина z при любом исходе испытания не может оказаться равной 4. Поэтому $P(z = 4) = 0$.

2) Случайная величина z принимает значение, меньшее 6, только когда $z = 1$ или $z = 3$. Поскольку события «случайная величина принимает значение 1» и «случайная величина принимает значение 3» являются несовместными, то

$$P(z < 6) = P(z = 1) + P(z = 3) = 0{,}1 + 0{,}35 = 0{,}45.$$

3) Имеем:

$$P(9 \leqslant z < 12) = P(z = 10) = 0{,}15.$$

4) Поскольку сумма чисел, записанных во второй строке таблицы, равна 1, то

$$P(z = 8) = 1 - (0{,}1 + 0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}15) = 0{,}15.$$

Пример 3. Случайная величина x равна количеству успешных испытаний в схеме Бернулли с параметрами n и p. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной величины x.

Решение. Множество значений случайной величины x равно $\{0, 1, 2, ..., n\}$. В предыдущем параграфе для определения вероятности того, что искомая случайная величина x принимает значение m, была получена формула $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, то есть $P(x = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$. Последовательно подставляя в эту формулу значения m, равные 0, 1, 2, ..., n, составим таблицу распределения вероятностей случайной величины x:

Значение x	0	1	2	...	n
Вероятность	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2(1-p)^{n-2}$	...	p^n

Напомним, что каждое из выражений $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ является одним из слагаемых разложения выражения $(p+q)^n$, где $q = 1 - p$, по формуле бинома Ньютона. Учитывая это, распределение вероятностей количества успешных испытаний в схеме Бернулли называют **биномиальным распределением**.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть случайная величина x равна величине месячной прибыли некоторой фирмы. Аналитики прогнозируют такое распределение вероятностей случайной величины x в следующем месяце:

Значение x, тыс. р.	–500	–40	110
Вероятность	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

Из таблицы видно, что при одном стечении обстоятельств фирма получит прибыль, при другом – убыток. Какую величину прибыли следует ожидать в следующем месяце?

Для ответа на этот вопрос будем рассуждать так. Предположим, что владелец фирмы имеет не одну такую фирму, а десять одинаковых фирм. Вероятность получить убыток в 500 тыс. р. равна $\frac{1}{10}$. Поэтому будем считать, что только одна из десяти рассматриваемых фирм получит в следующем месяце убыток в 500 тыс. р. Рассуждая аналогично, считаем, что две фирмы получат убыток по 40 тыс. р., а каждая из семи оставшихся – прибыль в 110 тыс. р. Общая прибыль всех десяти фирм вместе будет равна $(-500) \cdot 1 + (-40) \cdot 2 + 110 \cdot 7$ (тыс. р.), а значит, на каждую из них придётся

$$(-500) \cdot \frac{1}{10} + (-40) \cdot \frac{2}{10} + 110 \cdot \frac{7}{10} = 19 \text{ (тыс. р.)}.$$

Характеристика 19 тыс. р. показывает ожидаемый уровень прибыли каждой такой фирмы в следующем месяце. Эту характеристику называют **математическим ожиданием** случайной величины x и обозначают $M(x)$. Таким образом, $M(x) = 19$.

Обратите внимание на выражение $(-500) \cdot \frac{1}{10} + (-40) \cdot \frac{2}{10} + 110 \cdot \frac{7}{10}$, с помощью которого было вычислено математическое ожидание $M(x)$. Несложно заметить, что для вычисления $M(x)$ каждое из значений случайной величины x нужно умножить на вероятность наступления этого значения и все полученные произведения сложить.

Определение

Пусть случайная величина x имеет следующее распределение вероятностей:

Значение x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Число $M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$ называют математическим ожиданием случайной величины x.

Пример 4. Страховой полис[1] предполагает выплаты в случае наступления двух страховых случаев. В первом страховом случае размер выплат составит 25 тыс. р., а во втором – 175 тыс. р. По опыту прошлых лет известно, что первый страховой случай наступает с вероятностью 5%, а второй – с вероятностью 1%. На продаже каждого такого полиса страховая компания планирует заработать по 2 тыс. р. Определите, какую цену полиса должна назначить страховая компания.

[1] Документ, по которому страховая компания обязуется выплатить владельцу полиса определённые денежные суммы при наступлении предусмотренных страховых случаев.

Решение. Рассмотрим случайную величину x, равную размеру выплат страховой компанией по страховому полису. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины x.

Значение x, тыс. р.	0	25	175
Вероятность	0,94	0,05	0,01

Найдём математическое ожидание случайной величины x. Имеем:

$$M(x) = 0 \cdot 0,94 + 25 \cdot 0,05 + 175 \cdot 0,01 = 3.$$

Величина $M(x) = 3$ показывает, что ожидаемый размер выплат по каждому полису составит 3 тыс. р. Поскольку страховая компания планирует заработать по 2 тыс. р. на каждом полисе, то она должна установить цену такого полиса в 5 тыс. р.

Ответ: 5 тыс. р. ◄

Если множество значений случайной величины содержит много элементов, то вычислить математическое ожидание бывает сложно. Например, вычисление математического ожидания для биномиального распределения на основании одного лишь определения требует выполнения значительной технической работы. Тем не менее интуитивно найти правильный результат достаточно просто.

Например, пусть вероятность забросить мяч в баскетбольную корзину равна 65%. Сколько попаданий в кольцо следует ожидать при 100 бросках? Естественный ответ — 65 попаданий — является правильным. Здесь число 65 равно математическому ожиданию в схеме Бернулли с параметрами 100 и 0,65.

Вообще, ***математическое ожидание количества успехов в схеме Бернулли с параметрами n и p равно np***. Для доказательства этого свойства нужно более подробно изучить свойства математического ожидания. Это вы сможете сделать, продолжая изучать теорию вероятностей в высшем учебном заведении.

1. Что называют случайной величиной?

2. Что называют множеством значений случайной величины?

3. Что называют распределением вероятностей случайной величины?

4. Какое распределение вероятностей называют биномиальным?

5. Что называют математическим ожиданием случайной величины?

6. Чему равно математическое ожидание количества успехов в схеме Бернулли?

20.6. По таблице распределения вероятностей случайной величины x найдите значение переменной a.

1)

Значение x	0	12	48
Вероятность	0,27	0,05	a

2)

Значение x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Вероятность, %	17	30	a	29	24

3)

Значение x	1	2	3	4
Вероятность	a	$4a$	$9a$	$16a$

20.7. Дана таблица распределения вероятностей случайной величины x.

Значение x	0	2	5	7	12	20
Вероятность, %	9	26	35	11	7	12

Найдите:

1) $P(x = 5)$; 3) $P(x \geqslant 7)$; 5) $P(2 \leqslant x < 8)$.

2) $P(x = 1)$; 4) $P(x < 5)$;

20.8. Дана таблица распределения вероятностей случайной величины y.

Значение y	–3	–2	–1	1	2	3
Вероятность	0,02	0,09	0,36	0,28	0,14	0,11

Найдите:

1) $P(y = 3)$; 2) $P(y \geqslant 0)$; 3) $P(y < 5)$; 4) $P(-2 < y \leqslant 2)$.

20.9. Игральный кубик подбрасывают два раза и записывают сумму чисел, выпавших на кубике. Какую случайную величину изучают в этом испытании? Составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

20.10. В одной коробке лежат 2 шара, пронумерованные числами 1 и 2, а в другой – 3 шара, пронумерованные числами 1, 2 и 3. Из каждой коробки наугад берут по одному шару и записывают сумму чисел на взятых шарах. Какую случайную величину изучают в этом испытании? Составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

20.11. Игральный кубик подбрасывают один раз и записывают количество натуральных делителей числа, выпавшего на кубике. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной величины, изучаемой в этом испытании.

20.12. Монету подбрасывают не более пяти раз до тех пор, пока первый раз не выпадет герб, и записывают, сколько раз пришлось подбросить монету. Составьте таблицу распределения вероятностей изучаемой случайной величины.

20.13. Игральный кубик подбрасывают не более трёх раз до тех пор, пока первый раз не выпадет шестёрка, и записывают, сколько раз пришлось подбросить кубик. Составьте таблицу распределения вероятностей записанной случайной величины.

20.14. В сборную команду России на Международной математической олимпиаде входит 6 человек. На основании результатов выступления команды за прошлые годы распределение вероятностей количества золотых медалей, завоёванных ей на олимпиаде, можно оценить так:

Количество золотых медалей в команде	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность, %	0	0	20	20	30	20	10

Найдите математическое ожидание количества золотых медалей команды России на очередной Международной математической олимпиаде.

20.15. В сборную команду России на Международной математической олимпиаде входит 6 человек. На основании результатов выступления команды за прошлые годы распределение вероятностей количества серебряных медалей, завоёванных ей на олимпиаде, можно оценить так:

Количество серебряных медалей в команде	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность, %	10	25	45	15	5	0	0

Найдите математическое ожидание количества серебряных медалей команды России на очередной Международной математической олимпиаде.

20.16. Случайная величина x равна количеству препаратов, проданных аптекой одному покупателю за одну покупку. Известно, что $P(x = k) = a(6k - k^2)$ для $k = 0, 1, 2, ..., 6$. Найдите математическое ожидание количества препаратов, проданных аптекой одному покупателю за одну покупку.

20.17. Случайная величина y равна количеству школьников, присутствующих на очередном занятии математического кружка. Известно, что $P(y = k) = ak^2$ для $k = 5, 6, 7, 8, 9$. Найдите математическое ожидание количества школьников на занятии математического кружка.

20.18. Таблица распределения вероятностей выигрыша в азартной игре имеет вид:

Величина выигрыша, р.	0	100	300	1500
Вероятность, %	80	15	4	1

Цена билета для участия в игре составляет 50 р. Стоит ли играть в такую игру?

20.19. Фермер, выращивающий горох, сомневается, использовать ли ему семена нового сорта. Цена семян нового сорта такова, что их имеет смысл использовать только в том случае, если урожайность гороха увеличится на 10%. Собрав урожай с двух экспериментальных участков, фермер оценил распределение количества горошин в стручке старого и нового сортов (см. таблицу). Стоит ли фермеру использовать семена нового сорта?

Количество горошин в стручке гороха	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность для гороха старого сорта, %	12	13	20	26	18	6	5
Вероятность для гороха нового сорта, %	2	5	18	21	27	23	4

20.20. Общественная организация проводит беспроигрышную лотерею, прибыль от которой пойдёт на благотворительные цели. Каждый участник лотереи жертвует 500 р. и получает за это лотерейный билет, внутри которого написана сумма денежного приза. Таблица распределения вероятностей суммы приза имеет вид:

Сумма приза, р.	100	200	400	1000	5000
Вероятность	0,5	0,3	0,15	0,03	0,02

Оплата призов происходит за счёт пожертвованных средств. Какую сумму для благотворительных целей ожидает получить организация с одного лотерейного билета?

20.21. Чему равно математическое ожидание количества выпавших шестёрок при подбрасывании трёх игральных кубиков? Подтвердите ответ расчётом, основанным на определении математического ожидания.

20.22. Чему равно математическое ожидание количества выпавших гербов при подбрасывании пяти монет? Подтвердите ответ расчётом, основанным на определении математического ожидания.

20.23. Вероятность забить пенальти (штрафной 11-метровый удар в футболе) равна p.

1) Составьте таблицу распределения вероятностей количества забитых мячей в серии из пяти пенальти.

2) С точностью до 1% вычислите вероятности из составленной таблицы распределения, если $p = 0{,}8$.

3) Основываясь на полученных в пункте 2 приближённых значениях вероятностей и пользуясь определением математического ожидания, найдите математическое ожидание количества забитых мячей в серии из пяти пенальти.

4) Сколько забитых мячей следовало бы ожидать в серии из 20 ударов при $p = 0{,}8$?

20.24. Из большой коробки с конфетами, среди которых 30% шоколадных, Карлсон наугад достаёт 4 конфеты.

1) Составьте таблицу распределения вероятностей количества шоколадных конфет у Карлсона.

2) Вычислите, пользуясь определением, математическое ожидание количества шоколадных конфет у Карлсона.

3) Чему было бы равным математическое ожидание количества шоколадных конфет у Карлсона, если бы он наугад доставал 50 конфет?

Когда сделаны уроки

Закон больших чисел

Пусть в некотором опыте вероятность события A равна 50%. Означает ли это, что из 100 таких испытаний в 50 гарантированно произойдёт событие A? Конечно нет. Нас не должно удивлять, если в конкретной серии из 100 испытаний событие, вероятность которого равна 50%, произойдёт, например, 48 раз или 56 раз. Такое отношение к полученным результатам основано на том, что в серии из 100 испытаний частота события A, равная 0,48 или 0,56, не очень сильно отличается от вероятности события A.

При этом не исключена возможность того, что из 100 испытаний событие A, вероятность которого равна 50%, на самом деле произойдёт, скажем, 95 раз или, наоборот, произойдёт всего лишь 5 раз. Однако такие результаты могут вызвать удивление, поскольку частота, равная 0,95 или 0,05, значительно отличается от вероятности события A.

Наш опыт говорит, что при большом количестве испытаний частота события A примерно равна вероятности события A. В теории вероятностей доказана теорема, которая подтверждает этот вывод. Такую теорему относят к циклу теорем о **законе больших чисел**.

Упрощённый смысл закона больших чисел состоит в том, что если в отдельном испытании случайные факторы оказывают значительное влияние на результат испытания, то при многократном повторении одного и того же испытания эти случайные факторы взаимокомпенсируются и их влияние на результат в среднем уменьшается.

Например, если при одном ударе по мячу случайные факторы (порыв ветра, неровность футбольного поля и так далее) привели к тому, что мяч не попал в ворота, то при другом ударе эти же факторы могут привести к голу.

Прежде чем сформулировать упомянутую теорему, приведём несколько примеров.

Пусть в некотором опыте вероятность события A равна p. Проведём серию из n таких испытаний. Вы знаете, что такую серию испытаний называют схемой Бернулли с параметрами n и p. Обозначим через x_n случайную величину, равную частоте события A в этой серии. Вероятность того, что $x_n = \frac{m}{n}$, равна $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где $m \in \mathbf{Z}$ и $0 \leqslant m \leqslant n$. Поэтому таблица распределения вероятностей случайной величины x_n имеет вид:

Значение x_n	0	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	...	1
Вероятность	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$	...	p^n

Например, при $n = 10$ и $p = 40\%$ получим следующую таблицу распределения вероятностей (здесь и ниже вероятности подсчитаны с точностью до 0,1%):

Значение x_{10}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Вероятность, %	0,6	4,0	12,1	21,5	25,1	20,1

Значение x_{10}	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Вероятность, %	11,1	4,2	1,1	0,2	0,0

На рисунке 20.2 данные этой таблицы представлены в форме гистограммы.

Рис. 20.2

По этим данным можно оценить вероятность попадания величины x_{10} в тот или иной промежуток. Например, рассмотрим промежуток [0,3; 0,5], содержащий значение вероятности события A. Тогда вероятность того, что частота x_{10} удовлетворяет неравенству $0,3 \leqslant x_{10} \leqslant 0,5$, равна:

$$P(0,3 \leqslant x_{10} \leqslant 0,5) \approx 21,5 + 25,1 + 20,1 = 66,7\%.$$

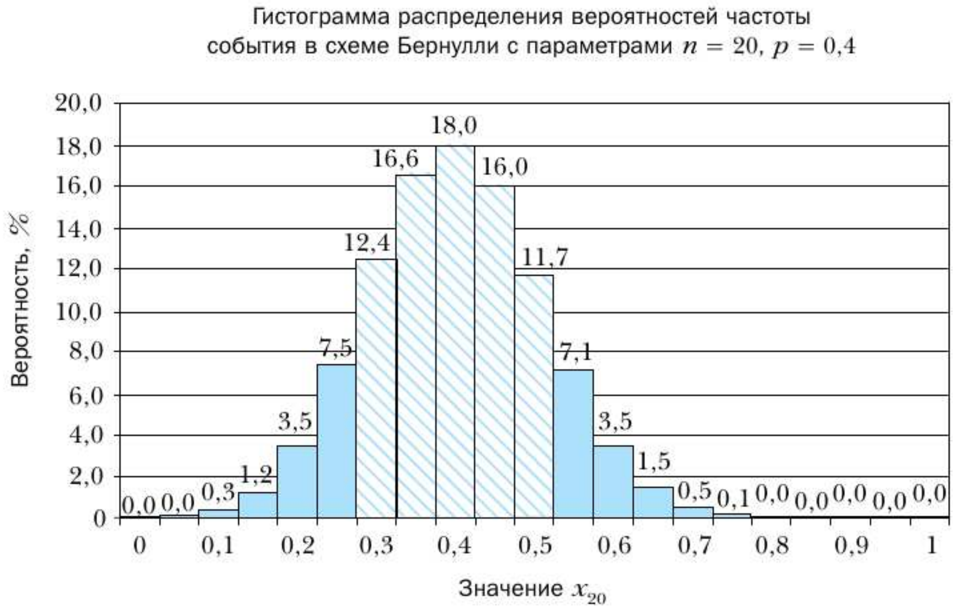
Увеличим число испытаний n до 20 и построим гистограмму распределения вероятностей частоты (рис. 20.3).

В этом случае вероятность того, что частота x_{20} удовлетворяет неравенству $0,3 \leqslant x_{20} \leqslant 0,5$, будет равна:

$$P(0,3 \leqslant x_{20} \leqslant 0,5) \approx 12,4 + 16,6 + 18,0 + 16,0 + 11,7 = 74,7\%.$$

Обратите внимание, что с ростом количества испытаний от $n = 10$ до $n = 20$ значение вероятности увеличилось с 66,7 до 74,7%.

Рис. 20.3



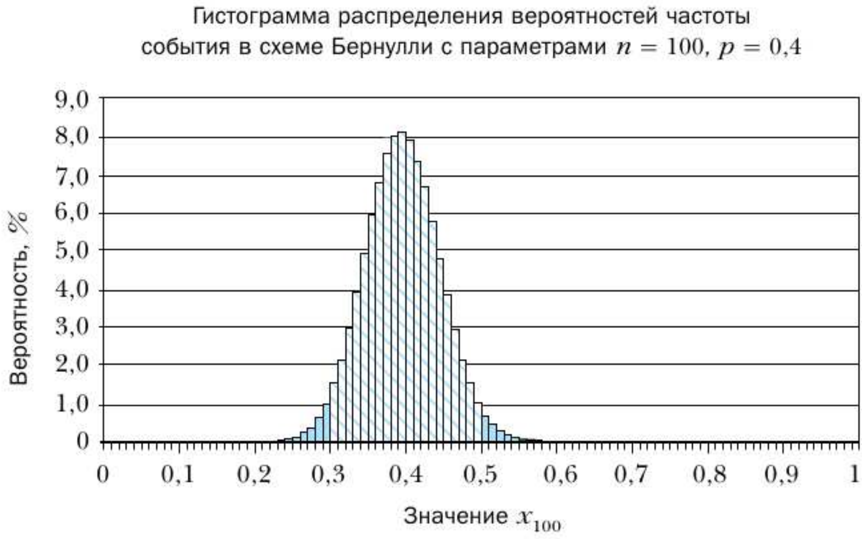
Если увеличить количество испытаний, например до $n = 100$ (рис. 20.4), то вероятность того, что частота попадёт между числами 0,3 и 0,5, увеличится ещё значительнее и окажется приблизительно равной 96,8%.

При дальнейшем увеличении количества испытаний n вероятность того, что частота попадёт между числами 0,3 и 0,5, будет неограниченно приближаться к значению 1. Это свойство в общем виде выражает одна из теорем, относящихся к серии теорем о законе больших чисел.

Теорема

Пусть событие A имеет вероятность p. Обозначим через x_n случайную величину, равную частоте события A в серии из n испытаний Бернулли. Тогда для любого числа $\delta > 0$ вероятность того, что выполняется двойное неравенство $p - \delta \leqslant x_n \leqslant p + \delta$, неограниченно приближается к 1 с ростом числа испытаний n.

Рис. 20.4



Когда сделаны уроки

Аксиоматика Колмогорова

Математика – древняя наука. Такие основные математические понятия, как число или простейшие геометрические фигуры, пусть и в зачаточном виде, возникли задолго до появления письменности. Конечно, с течением времени они уточнялись и совершенствовались, на основе этих понятий появлялись целые разделы математики. Можно сказать, что многие из них имеют исторический багаж практического применения в несколько тысяч лет.

Теория вероятностей и математическая статистика – науки молодые. Они возникли всего несколько сотен лет назад. Если развитие математики в древности стимулировали важные для выживания человека проблемы, то первые исследования по теории вероятностей были связаны с азартными играми. Так, в Средние века появились задачи о подсчёте вероятностей выпадения тех или иных комбинаций при бросании игральных костей. В середине XVII века теорией вероятностей заинтересовались такие учёные, как Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс. Например, Гюйгенс вводит в рассмотрение изученное вами в § 20 понятие математического ожидания. В начале

XVIII века Я. Бернулли формулирует и доказывает первый вариант закона больших чисел.

К началу XX века здание теории вероятностей существенно разрослось. Было открыто много новых методов, доказаны важные и сложные теоремы. В этом значительную роль сыграли российские математики П. Л. Чебышёв, А. М. Ляпунов, А. А. Марков.

Однако у этой молодой науки всё ещё отсутствовал прочный фундамент, опираясь на который можно было бы смело двигаться дальше. Величайший математик Д. Гильберт включает задачу построения прочных основ теории вероятностей в свой знаменитый список проблем для математиков XX века. Примечательно, что заслуга решения этой задачи принадлежит российскому математику, одному из лидеров математической науки XX века Андрею Николаевичу Колмогорову (1903–1987).

Подход Колмогорова к теории вероятностей основан на понятиях случайного события и его вероятности. Именно так сейчас излагают элементарную теорию вероятностей практически во всех школах и вузах мира. Учебник, который вы держите в руках, конечно же не является исключением. Ниже приведён отрывок из книги А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», в которой он описывает свой подход и даёт перечень аксиом теории вероятностей. Обратите внимание, что некоторые формулировки практически дословно повторяют изученные вами определения.

§ 1. Аксиомы

Пусть Ω — множество элементов ω, которые мы будем называть *элементарными событиями*, а $\mathscr{F}$ — множество подмножеств из Ω. Элементы множества $\mathscr{F}$ будем называть *случайными событиями* (или просто — *событиями*), а Ω — *пространством элементарных событий.*

I. *$\mathscr{F}$ является алгеброй множеств.*

II. *Каждому множеству A из $\mathscr{F}$ поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\mathrm{P}(A)$. Это число называется вероятностью события A.*

III. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

IV. *Если A и B не пересекаются, то* $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Совокупность объектов $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$, удовлетворяющую аксиомам **I–IV**, будем называть ***полем вероятностей***.

Выдающиеся достижения А. Н. Колмогорова далеко не исчерпываются открытиями в теории вероятностей. Его исключительной чертой была широчайшая разносторонность, позволившая получить основополагающие результаты в нескольких десятках (!) областей математики. Кроме того, А. Н. Колмогоров значительную часть своих творческих сил посвящал педагогической деятельности. Андрей Николаевич был одним из организаторов первых олимпиад, математического кружка для школьников при МГУ. По его инициативе были созданы первые в стране физико-математические школы, научно-популярный физико-математический журнал «Квант». Многие поколения школьников нашей страны учились по учебникам А. Н. Колмогорова.

О случайных величинах

1. Дискретные случайные величины и их распределения

Рассмотрим несколько примеров случайных величин.

Если контрольная работа состоит из четырёх задач и случайная величина x равна количеству правильно решённых задач, то такая случайная величина x может принимать следующие значения:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{1}$$

Ещё один пример. Случайная величина y равна натуральному числу, выбранному некоторым случайным образом. Понятно, что величина y может принять одно из значений:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ \ldots\ . \tag{2}$$

Обратите внимание, что в обоих приведённых примерах все значения случайной величины записаны в виде последовательности чисел – конечной (1) или бесконечной (2). В таких случаях говорят, что рассматриваемая случайная величина является **дискретной** или, точнее, что случайная величина имеет **дискретное распределение**.

Приведём один важный пример случайной величины, имеющей дискретное распределение и принимающей бесконечное множество значений. Этот пример напоминает схему Бернулли, в которой результатами эксперимента были всевозможные последовательности определённой длины вида

УННУН...У,

состоящие из «У» – успех, «Н» – неудача.

Рассмотрим опыт, результатами которого также являются конечные последовательности, состоящие из букв «У» – успех, «Н» – неудача. Однако, в отличие от схемы Бернулли, где все последовательности имели одинаковую длину, сейчас нас будут интересовать такие последовательности:

У,
НУ,
ННУ,
НННУ,
...

Этот бесконечный список состоит из всех конечных последовательностей с одной буквой «У», стоящей на последнем месте. Такие результаты опыта можно получить, если, например, проводить серию из одинаковых испытаний с исходами «У» и «Н» до первого успешного исхода, после которого серия прерывается.

В этом опыте рассмотрим случайную величину x, равную количеству букв «Н» в последовательности, являющейся результатом опыта. Например, если опыт закончился результатом ННУ, то $x = 2$. Таким образом, величина x показывает, сколько неудачных попыток нужно сделать до первой удачной. Ясно, что случайная величина x принимает целые неотрицательные значения.

Если положить, что вероятность успешного исхода «У» в одном отдельном испытании равна p, а неуспешного «Н» — $(1 - p)$, то можно составить таблицу распределения вероятностей случайной величины x:

Результат опыта	У	НУ	ННУ	НННУ	...
Значение x	0	1	2	3	...
Вероятность	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	...

Вероятности, записанные в последней строке таблицы, образуют бесконечную геометрическую прогрессию

$$p,\ (1-p)p,\ (1-p)^2p,\ (1-p)^3p,\ \ldots$$

с первым членом $b_1 = p$ и знаменателем $q = 1 - p$.

Обратите внимание, что сумма членов этой бесконечной геометрической прогрессии равна 1. Действительно,

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Таким образом, приведённая выше таблица действительно задаёт распределение вероятностей случайной величины x. Говорят, что величина x имеет **геометрическое распределение вероятностей**.

2. Операции над случайными величинами

Красный и синий игральные кубики подбрасывают один раз и изучают случайную величину x, равную числу, выпавшему на красном кубике. В этом же испытании нас могут интересовать и другие случайные величины, например:

- величина y, равная числу, выпавшему на синем кубике;
- величина z, равная сумме чисел, выпавших на кубиках;
- величина t, равная произведению чисел, выпавших на кубиках;
- величина u, равная величине x, возведённой в пятую степень.

Таким образом, *в одном испытании может изучаться несколько разных случайных величин*.

Обратите внимание, что, как бы ни закончилось описанное выше испытание, значение случайной величины z всегда равно сумме значений случайных величин x и y. В таком случае говорят, что случайная величина z равна **сумме случайных величин** x и y. Записывают: $z = x + y$.

Аналогично определяют и другие операции со случайными величинами. Например, $t = xy$ и $u = x^5$.

Задача. Монету подбрасывают трижды. Случайная величина x равна количеству выпавших при этом гербов, а случайная величина y равна 0, если в первом подбрасывании выпал герб, и 3 в противном случае. Найдите:

1) распределение случайной величины x;
2) распределение случайной величины y;
3) распределение случайной величины $z = x + y$.

Решение. Будем писать букву «Г», если на монете выпадает герб, и букву «Ч», если число. Тогда в рассматриваемом опыте существует 8 равновозможных результатов испытания:

ГГГ, ГГЧ, ГЧГ, ГЧЧ, ЧГГ, ЧГЧ, ЧЧГ, ЧЧЧ.

1) Случайная величина x равна нулю (выпало 0 гербов) только в одном из восьми случаев — если произойдёт исход ЧЧЧ. Поэтому

$P(x = 0) = \frac{1}{8}$ — результат испытания ЧЧЧ.

Аналогично найдём вероятности для других значений величины x. Имеем:

$P(x = 1) = \frac{3}{8}$ — результаты испытания ГЧЧ, ЧГЧ, ЧЧГ;

$P(x = 2) = \frac{3}{8}$ — результаты испытания ГГЧ, ГЧГ, ЧГГ;

$P(x = 3) = \frac{1}{8}$ — результат испытания ГГГ.

Теперь можно составить таблицу распределения вероятностей случайной величины x:

Значение x	0	1	2	3
Вероятность	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Обратим внимание, что к полученному результату можно было прийти и иначе. Например, если заметить, что случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 3$ и $p = \frac{1}{2}$, то значения вероятностей, представленные в последней таблице, можно было бы найти, опираясь на формулу $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, полученную в § 19.

2) Найдём распределение случайной величины y. Имеем:

$P(y = 0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ – результаты испытания ГГГ, ГГЧ, ГЧГ, ГЧЧ;

$P(y = 3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ – результаты испытания ЧГГ, ЧГЧ, ЧЧГ, ЧЧЧ.

Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины y:

Значение y	0	3
Вероятность	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3) Составим общую таблицу значений величин x и y в зависимости от результатов испытания:

Результат испытания	ГГГ	ГГЧ	ГЧГ	ГЧЧ	ЧГГ	ЧГЧ	ЧЧГ	ЧЧЧ
Значение x	3	2	2	1	2	1	1	0
Значение y	0	0	0	0	3	3	3	3

Сформируем в этой таблице ещё одну строку для значений случайной величины $z = x + y$:

Результат испытания	ГГГ	ГГЧ	ГЧГ	ГЧЧ	ЧГГ	ЧГЧ	ЧЧГ	ЧЧЧ
Значение x	3	2	2	1	2	1	1	0
Значение y	0	0	0	0	3	3	3	3
Значение $z = x + y$	3	2	2	1	5	4	4	3

Из полученной таблицы видно, что, например, случайная величина z равна числу 5 в одном случае из восьми – когда произойдёт исход ЧГГ. Поэтому

$P(z = 5) = \frac{1}{8}$ – результат испытания ЧГГ.

Аналогично найдём вероятности для других значений величины z. Имеем:

$P(z = 1) = \frac{1}{8}$ – результат испытания ГЧЧ;

$P(z = 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ – результаты испытания ГГЧ, ГЧГ;

$P(z = 3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ – результаты испытания ГГГ, ЧЧЧ;

$P(z = 4) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ – результаты испытания ЧГЧ, ЧЧГ.

Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины $z = x + y$:

Значение $z = x + y$	1	2	3	4	5
Вероятность	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Упражнения

1. Монету подбрасывают дважды. Случайная величина x равна количеству выпавших при этом гербов. Найдите:
1) распределение случайной величины x;
2) распределение случайной величины x^2;
3) распределение случайной величины $z = x + x^2$.

2. Монету и кубик подбрасывают одновременно. Случайная величина x равна числу, выпавшему на кубике, а случайная величина y равна 1, если монета выпала кверху гербом, и 0, если числом. Найдите:
1) распределение случайной величины x;
2) распределение случайной величины y;
3) распределение случайной величины $z = xy$.

3. Независимые случайные величины

Изучая теорию вероятностей, вы ознакомились с понятием «независимые случайные события». Например, если подбросить красный и синий игральные кубики, то события

$$A_k = \{\text{на красном кубике выпало число } k\}$$

и

$$B_m = \{\text{на синем кубике выпало число } m\}$$

являются независимыми при любых значениях k и m, где k и m – натуральные числа от 1 до 6. Этот факт согласуется с нашей интуицией. Поскольку

Основываясь на оценках болельщика, найдите вероятность того, что команды «Зенит» и ЦСКА суммарно наберут: 1) 2 очка; 2) 4 очка.

Решение.

1) Рассмотрим случайную величину $z = x + y$. Найдём, с какой вероятностью случайная величина $z = x + y$ принимает значение, равное 2.

Если $x + y = 2$, то оба матча завершились вничью, т. е. $x = 1$ и $y = 1$.

По условию задачи случайные величины x и y независимы. Поэтому

$$P(z = 2) = P(x = 1 \text{ и } y = 1) = P(x = 1) \cdot P(y = 1) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06.$$

2) Найдём, с какой вероятностью случайная величина $z = x + y$ принимает значение, равное 4.

Если $x + y = 4$, то возможны два варианта:

событие $\{A\colon x = 3 \text{ и } y = 1\}$,

событие $\{B\colon x = 1 \text{ и } y = 3\}$.

По условию задачи случайные величины x и y независимы. Поэтому

$$P(A) = P(x = 3 \text{ и } y = 1) = P(x = 3) \cdot P(y = 1) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3;$$

$$P(B) = P(x = 1 \text{ и } y = 3) = P(x = 1) \cdot P(y = 3) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03.$$

Поскольку события A и B несовместны, то

$$P(z = 4) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}03 = 0{,}33.$$

Ответ: 1) 6%; 2) 33%. ◄

Если в определении независимых случайных величин говорить не о двух, а об n случайных величинах $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то получим определение n независимых дискретных случайных величин.

Для независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и произвольных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ выполняется равенство

$$\boxed{\boldsymbol{P(x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n) = P(x_1 = k_1) \cdot \ldots \cdot P(x_n = k_n)}}$$

Понятно, что не все случайные величины являются независимыми. Приведём пример. Монету подбрасывают три раза. Пусть x – количество выпавших гербов, а y – количество гербов, выпавших на монетах при первых двух подбрасываниях. Случайные величины x и y являются **зависимыми**, поскольку зависимыми являются, например, два события:

событие $\{A\colon x = 3\}$ и

событие $\{B\colon y = 2\}$.

Действительно, несложно установить, что вероятность события B (при первых двух подбрасываниях выпало 2 герба) равна $P(B) = \frac{1}{4}$. Если же предварительно сообщить, что произошло событие A (все три раза выпадал герб), то при таком условии вероятность события B уже будет равна 1, т. е. $P_A(B) = 1$.

В теории вероятностей существуют характеристики, оценивающие степень зависимости случайных величин. К ним относятся такие характеристики, как **ковариация**, **коэффициент корреляции** и др. Познакомиться с этими понятиями вы сможете, если примете участие в работе над проектом «Зависимые случайные величины».

Упражнения

1. В условиях задачи о турнире Лиги чемпионов найдите распределение суммы случайных величин x и y.

2. Туристическая фирма проводит акцию «Выбери цену сам!». Клиенту, планирующему купить путёвку, предлагается независимо вытянуть два билета: первый – с величиной ежедневной скидки за путёвку, второй – с количеством дней, в течение которых будет действовать эта скидка.

Величина ежедневной скидки, р.	400	2000	4000
Вероятность, %	70	25	5

Время действия скидки, дни	1	2	5	10
Вероятность, %	40	30	20	10

Найдите вероятность того, что туристическая фирма предоставит клиенту скидку на общую сумму 4000 р.

4. Дисперсия случайной величины

При производстве автомобилей значительное внимание уделяют вопросам безопасности. Предположим, что некий автопроизводитель выбирает, какой системой безопасности оснастить новую модель автомобиля. В случае угрозы столкновения эффективность работы системы безопасности предлагают оценивать по шкале от 0 до 5, где 0 – автомобиль полностью разрушен, 5 – благодаря системе безопасности столкновения удалось избежать (люди и автомобиль не пострадали). После испытаний двух таких систем инженеры составили таблицы:

Эффективность работы первой системы безопасности	0	1	2	3	4	5
Вероятность, %	5	0	0	0	0	95

Эффективность работы второй системы безопасности	0	1	2	3	4	5
Вероятность, %	0	0	0	0	25	75

Какой системе отдать предпочтение?

Пусть x – случайная величина, описывающая работу первой системы безопасности, т. е. x принимает значения от 0 до 5, распределённые согласно первой таблице. Аналогично, y – случайная величина, описывающая работу второй системы безопасности. Для того чтобы оценить эффективность работы каждой из систем, найдём математические ожидания этих случайных величин. Имеем:

$$M(x) = 0 \cdot 0{,}05 + 5 \cdot 0{,}95 = 4{,}75,$$
$$M(y) = 4 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}75 = 4{,}75.$$

Поскольку математические ожидания обеих случайных величин одинаковы, то в среднем обе системы работают с одинаковой эффективностью. Однако автопроизводитель скорее выберет вторую систему как более надёжную. Действительно, при работе первой системы в 5% случаев могут погибнуть люди, при работе же второй системы даже в наихудшем случае люди отделаются синяками и царапинами. Это можно описать иначе: среди значений случайной величины x достаточно часто будут встречаться числа, значительно отличающиеся от среднего (математического ожидания), в то время как значения случайной величины y в целом будут расположены более кучно.

В теории вероятностей существуют характеристики, количественно описывающие такие понятия, как «кучность», «разброс» и т. д. Познакомимся с одной из них.

Определение

Дисперсией $D(x)$ случайной величины x называют математическое ожидание случайной величины $(x - M(x))^2$, т. е. $D(x) = M\left((x - M(x))^2\right)$.

Дисперсия является мерой рассеивания. Это означает, что дисперсия показывает, в какой степени значения, принимаемые случайной величиной, будут, в целом, «разбросаны» (или ещё говорят, «рассеяны») по координатной прямой. Чем дисперсия больше, тем больший «разброс» получаемых значений следует ожидать.

Например, если подсчитать дисперсии случайных величин x и y в рассмотренном примере о безопасности автомобиля, то дисперсия величины x окажется большей. Убедиться в этом самостоятельно вы сможете, решая упражнения после пункта.

Дисперсия — не единственная мера рассеивания. Кроме неё, в теории вероятностей часто используют такие меры рассеивания, как:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \text{ — стандартное отклонение,}$$

$$|\Delta(x)| = M|x - M(x)| \text{ — среднее абсолютное отклонение и др.}$$

Задача. Найдите дисперсию случайной величины x, если её распределение вероятностей имеет вид:

Значение x	2	3	7
Вероятность, %	40	50	10

Решение. Имеем: $M(x) = 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}1 = 3$.

Рассмотрим случайную величину $x - M(x) = x - 3$. Её распределение вероятностей имеет вид:

Значение $x - M(x)$	–1	0	4
Вероятность, %	40	50	10

Теперь найдём распределение вероятностей случайной величины $(x - M(x))^2$. Получаем:

Значение $(x - M(x))^2$	1	0	16
Вероятность, %	40	50	10

Осталось найти математическое ожидание случайной величины $(x - M(x))^2$:

$$D(x) = M((x - M(x))^2) = 1 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}5 + 16 \cdot 0{,}1 = 2.$$

Ответ: 2. ◄

Упражнения

1. Найдите дисперсии случайных величин x и y, рассмотренных в примере о безопасности автомобиля.

2. Найдите дисперсию числа очков, выпадающих при бросании игрального кубика.

3. Пусть случайная величина x имеет распределение Бернулли:

Значение x	0	1
Вероятность	$1 - p$	p

Докажите, что

$$M(x) = p, \ \ D(x) = p(1 - p).$$

5. Основные свойства математического ожидания и дисперсии

Рассмотрим некоторые свойства математического ожидания и дисперсии.

1. Если $x = c$, где c – константа, то $M(x) = c$ и $D(x) = 0$.

2. Если $M(x)$ и $D(x)$ – математическое ожидание и дисперсия случайной величины x, а c – константа, то

$$M(cx) = cM(x) \ \text{ и } \ D(cx) = c^2D(x).$$

Докажем, например, первое свойство. Если случайная величина x равна константе c, то это означает, что её распределение вероятностей имеет вид:

Значение x	c
Вероятность, %	100

Поэтому

$$M(x) = c \cdot 1 = c.$$

Найдём дисперсию случайной величины x. Имеем:

$$D(x) = M\left((x - M(x))^2\right) = M\left((c - c)^2\right) = M\left(0\right) = 0.$$

Путь доказательства второго свойства наметим в следующей задаче.

Задача. Множество значений случайной величины x состоит из трёх чисел. Докажите, что для произвольной константы c выполняется равенство

$$M(cx) = cM(x).$$

Решение. Пусть распределение вероятностей случайной величины x имеет вид:

Значение x	x_1	x_2	x_3
Вероятность	p_1	p_2	p_3

Тогда по определению математического ожидания получаем:

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3.$$

Рассмотрим случайную величину cx. Её распределение вероятностей задаётся следующей таблицей:

Значение cx	cx_1	cx_2	cx_3
Вероятность	p_1	p_2	p_3

Поэтому

$$M(cx) = cx_1p_1 + cx_2p_2 + cx_3p_3 = c(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) = cM(x),$$

что и требовалось доказать. ◄

Используя свойство $M(cx) = cM(x)$, докажем, что $D(cx) = c^2D(x)$. Имеем:

$$D(cx) = M\left((cx - M(cx))^2\right) = M\left((cx - cM(x))^2\right) = M\left(c^2(x - M(x))^2\right) =$$
$$= c^2M\left((x - M(x))^2\right) = c^2D(x).$$

Упражнения

1. О случайной величине x известно, что $M(x) = 5$, $D(x) = 3$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

1) $y = 2x$; 2) $z = -x$; 3) $t = \frac{x}{3}$.

2. На карте с масштабом 1 : 10 000 линейкой измеряют расстояние между точками A и B. Случайная величина x равна измеренному расстоянию (в сантиметрах). Известно, что $M(x) = 7$, $D(x) = 0{,}1$. Оцените расстояние на местности между пунктами A и B (в метрах). Чему равна дисперсия величины, равной вычисленному расстоянию между пунктами A и B на местности?

6. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин

Игральный кубик подбрасывают дважды. Пусть x – случайная величина, равная количеству очков на кубике при первом подбрасывании, а y –

при втором. Каждое из своих значений, т. е. числа от 1 до 6, случайные величины x и y принимают с вероятностью $\frac{1}{6}$. Поэтому

$$M(x) = M(y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Чему равно математическое ожидание случайной величины $x + y$? Естественно предположить, что если значение каждой из случайных величин x и y в среднем равно 3,5, то ожидаемое значение их суммы должно быть равным $3{,}5 + 3{,}5 = 7$.

Подтвердить нашу догадку позволяет следующая теорема.

Теорема 1

Если $M(x)$ и $M(y)$ — математические ожидания случайных величин x и y, то математическое ожидание случайной величины $x + y$ равно $M(x) + M(y)$, т. е.

$$M(x + y) = M(x) + M(y). \tag{1}$$

Аналогичная формула выполняется и для большего количества случайных величин:

$$\boxed{M(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \ldots + M(x_n)} \tag{2}$$

Докажем формулу (1) для частного случая – испытания с тремя возможными результатами (исходами) ω_1, ω_2 и ω_3.

Пусть в этом испытании изучают случайные величины x, y и $x + y$. Составим таблицу значений этих случайных величин и их вероятностей в зависимости от результата испытания.

Результат испытания	ω_1	ω_2	ω_3
Значение x	x_1	x_2	x_3
Значение y	y_1	y_2	y_3
Значение $x + y$	$x_1 + y_1$	$x_2 + y_2$	$x_3 + y_3$
Вероятность	p_1	p_2	p_3

Пользуясь данными этой таблицы, запишем математические ожидания $M(x)$, $M(y)$ и $M(x + y)$. Имеем:

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3,$$

$$M(y) = y_1p_1 + y_2p_2 + y_3p_3,$$
$$M(x + y) = (x_1 + y_1)p_1 + (x_2 + y_2)p_2 + (x_3 + y_3)p_3.$$

Видим, что сумма полученных значений $M(x)$ и $M(y)$ равна $M(x + y)$, что и требовалось доказать.

Формулу (2) можно доказать подобным образом.

Пример 1. Игральный кубик подбрасывают n раз и подсчитывают количество выпавших при этом шестёрок. Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

Решение. Пусть случайная величина x_1 равна количеству шестёрок, выпавших при первом броске. Понятно, что такая величина принимает одно из двух значений: 1 или 0 и имеет следующее распределение:

Значение x_1	0	1
Вероятность	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Поэтому $M(x_1) = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

Аналогично рассмотрим величины x_2, x_3, ..., x_n, равные количеству выпавших шестёрок соответственно на втором, третьем, ..., n-м броске. Ясно, что $M(x_2) = M(x_3) = \ldots = M(x_n) = \frac{1}{6}$.

Рассмотрим теперь случайную величину $y = x_1 + \ldots + x_n$, равную количеству шестёрок, выпавших за все n бросков. Используя формулу (2), получаем:

$$M(y) = M(x_1) + \ldots + M(x_n) = \frac{n}{6}.$$

Ответ: $\frac{n}{6}$ шестёрок. ◄

Следующая теорема показывает, как можно найти дисперсию суммы независимых случайных величин.

Теорема 2

Если $D(x)$ и $D(y)$ — дисперсии независимых случайных величин x и y, то дисперсия случайной величины $x + y$ равна $D(x) + D(y)$, т. е.

$$D(x + y) = D(x) + D(y).$$

Аналогично, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – независимые случайные величины и $D(x_i)$ – дисперсия величины x_i, то

$$D(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = D(x_1) + D(x_2) + \ldots + D(x_n). \qquad (3)$$

С доказательством этой теоремы вы сможете ознакомиться, если продолжите изучать курс теории вероятностей в высшем учебном заведении.

Пример 2. Игральный кубик подбрасывают n раз и подсчитывают количество выпавших при этом шестёрок. Найдите дисперсию этой случайной величины.

Решение. Пусть случайная величина x_i равна количеству шестёрок, выпавших при i-м броске. Тогда $D(x_i) = \frac{5}{36}$ (проверьте это самостоятельно).

Рассмотрим теперь случайную величину $y = x_1 + \ldots + x_n$, равную количеству шестёрок, выпавших за все n бросков. Поскольку броски кубика проводились независимо один от другого, то случайные величины x_i также являются независимыми. Используя формулу (3), получаем:

$$D(y) = D(x_1) + \ldots + D(x_n) = \frac{5n}{36}.$$

Ответ: $\frac{5n}{36}$. ◄

Упражнения

1. Пусть $D(x)$ – дисперсия случайной величины x. Докажите, что $D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$.

2. Пусть $D(x)$ – дисперсия случайной величины x и c – константа. Докажите, что $D(x + c) = D(x)$.

3. Пусть случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Докажите, что $M(x) = np$, $D(x) = np(1 - p)$.

4. Вероятность события A в некотором испытании равна p. Проводят серию из n таких испытаний и подсчитывают частоту $x_n = \frac{n_A}{n}$ события A, где n_A – число испытаний в этой серии, в которых произошло событие A. Докажите, что $M(x_n) = p$, $D(x_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

7. Неравенство Чебышёва

Пусть x – некоторая случайная величина, $\mu = M(x)$ – её математическое ожидание. Изучая теорию вероятностей, мы неоднократно говорили, что число μ показывает некое среднее ожидаемое значение случайной величины x. Конечно, это не означает, что, проведя эксперимент, непременно получим значение величины x, равное числу μ. Оно может оказаться как больше, так и меньше μ. Более того, расстояние от полученного значения случайной величины x до числа μ может оказаться довольно значительным.

В теории вероятностей существует замечательная теорема, позволяющая оценить шансы того, что случайная величина примет значение, значительно отстоящее от её математического ожидания. Эта теорема была доказана великим русским математиком П. Л. Чебышёвым и названа в его честь (см. рассказ «Русский Архимед» на с. 68).

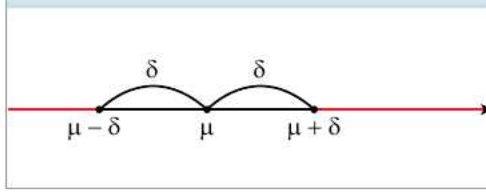
Теорема
(неравенство Чебышёва)

Пусть случайная величина x имеет математическое ожидание μ и дисперсию D. Тогда для любого положительного числа δ выполняется неравенство

$$P(|x-\mu|>\delta) \leqslant \frac{D}{\delta^2}. \qquad (1)$$

Поясним содержание этой теоремы. Неравенство $|x-\mu|>\delta$ означает, что случайная величина x принимает значение, отстоящее от числа μ на расстояние большее, чем δ. На рисунке 20.5 части прямой, на которых может находиться такое значение случайной величины x, выделены красным цветом. Если число δ большое, то это означает, что значение случайной величины x значительно отличается от математического ожидания μ. В этом случае неравенство (1) означает, что шансы такого события невелики, ведь число $\frac{D}{\delta^2}$ будет маленьким. Таким образом, неравенство Чебышёва констатирует: шансы того, что в результате испытания случайная величина x примет значение, значительно отличающееся от её математического ожидания, малы.

Рис. 20.5



Опираясь на неравенство Чебышёва, можно обосновать закон больших чисел (см. рассказ «Закон больших чисел» на с. 179). Действительно, если вероятность события A равна p, а x_n – частота события A в серии из n независимых испытаний, то из ключевой задачи 4 пункта 6 следует, что

$$\mu = M(x_n) = p, \;\; D = D(x_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Применяя неравенство Чебышёва, получаем:

$$P(|x_n - p| > \delta) \leqslant \frac{p(1-p)}{\delta^2 n}.$$

С ростом n величина $\frac{p(1-p)}{\delta^2 n}$ становится всё меньше и меньше, неограниченно приближаясь к нулю. Это означает, что неограниченно приближается к нулю вероятность того, что выполняется неравенство $|x_n - p| > \delta$. Противоположным к неравенству $|x_n - p| > \delta$ является неравенство $|x_n - p| \leqslant \delta$, которое можно переписать в виде $p - \delta \leqslant x_n \leqslant p + \delta$. Поэтому вероятность того, что выполняется двойное неравенство $p - \delta \leqslant x_n \leqslant p + \delta$, с ростом n неограниченно приближается к 1.

8. Непрерывно распределённые случайные величины

До этого момента мы рассматривали дискретные случайные величины. Однако существуют случайные величины, не являющиеся дискретными.

Например, рассмотрим случайную величину t, равную выбранному случайным образом числу из промежутка $[0; 1]$. В этом случае множеством значений случайной величины t будет промежуток $[0; 1]$. Все элементы промежутка $[0; 1]$ нельзя записать в виде последовательности[1], поэтому случайная величина t не является дискретной.

Попробуем вычислить, чему равна вероятность того, что случайная величина t примет, например, значение, равное $\frac{1}{3}$. Если мы попытаемся организовать выбор так, чтобы все числа на промежутке $[0; 1]$ находились в «равных условиях», то нам придётся принять, что эта вероятность равна нулю. Действительно, вероятность события $\left\{t = \frac{1}{3}\right\}$ не может быть больше нуля, поскольку в нашем опыте бесконечно много равновероятных исходов.

Понятно, что утверждение $P\left(t = \frac{1}{3}\right) = 0$ верно не только для числа $\frac{1}{3}$, но и для любого другого числа из промежутка $[0; 1]$. Таким образом, случайная величина t принимает каждое своё значение с вероятностью, равной нулю! Если для дискретных случайных величин таблица распределения вероятностей играла ключевую роль, то в данном случае такая таблица была бы бессмысленной, поскольку строка вероятностей состояла бы из одних нулей. Это означает, что описывать случайную величину t нужно принципиально иначе. Ознакомимся с таким способом.

[1] С доказательством этого факта вы познакомитесь, если продолжите изучать математику в высшем учебном заведении.

Определение

Пусть t — случайная величина и существует определённая на R неотрицательная функция $p(x)$ такая, что для любых чисел a и b , где $a < b$, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $p(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, равна вероятности того, что значение случайной величины t попадёт в промежуток $[a; b]$. В таком случае говорят, что функция $p(x)$ является плотностью распределения вероятностей случайной величины t (рис. 20.6)**.**

Случайные величины, для которых существует плотность распределения вероятностей, не являются дискретными. Их относят к классу **непрерывно распределённых** случайных величин.

Образно можно сказать, что значения непрерывной случайной величины непрерывно заполняют некоторый промежуток числовой прямой. При этом плотность распределения вероятностей помогает понять, вблизи каких чисел вероятность появления случайной величины больше, а вблизи каких меньше.

Например, на рисунке 20.7 изображён график плотности распределения вероятностей некоторой случайной величины. Видим, что в точке x_1 значение плотности больше, чем в точке x_2. То же самое можно сказать и о точках, близких к x_1 и к x_2 соответственно. Поэтому, если рассмотреть две узкие криволинейные трапеции с одинаковыми основаниями, содержащие точки x_1 и x_2, то площадь криволинейной трапеции, содержащей точку x_1, будет больше. Это означает, что рассматриваемая случайная величина с большей вероятностью примет значение в окрестности числа x_1, чем в такой же окрестности числа x_2.

Рис. 20.6

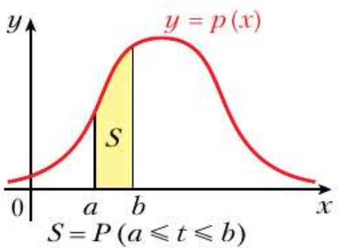
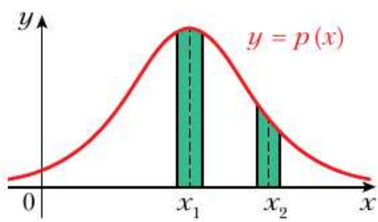


Рис. 20.7



Обратите внимание: в только что рассмотренном примере мы говорим о вероятности того, что значение случайной величины попадёт в промежуток, содержащий число x_1. Вероятность же того, что случайная величина примет значение x_1, равна нулю.

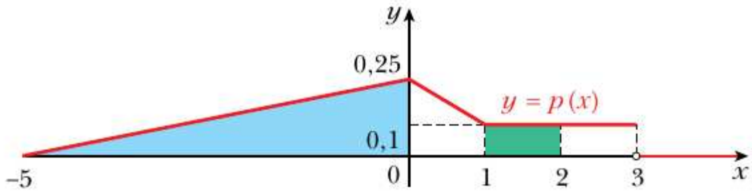
Приведём ещё один пример. На рисунке 20.8 изображён график плотности $p(x)$ распределения вероятностей некоторой случайной величины t. Опираясь на этот график, можно сделать, например, такие заключения:

• вероятность того, что значение случайной величины t попадёт в промежуток $[1; 2]$, равна площади закрашенного в зелёный цвет прямоугольника, т. е. равна $\frac{1}{10}$;

• вероятность того, что значение случайной величины t попадёт в промежуток $[-5; 0]$, равна площади закрашенного в голубой цвет треугольника, т. е. равна $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$;

• вероятность того, что значение случайной величины t попадёт в промежуток $[4; 6]$, равна нулю, поскольку на этом промежутке плотность распределения вероятностей $p(x)$ равна нулю и, значит, площадь соответствующей криволинейной трапеции тоже нулевая.

Рис. 20.8



Обратите внимание, что вне промежутка $[-5; 3]$ плотность распределения вероятностей $p(x)$ равна нулю. Это означает, что с вероятностью 1 все значения случайной величины t попадают на промежуток $[-5; 3]$. Можно сказать и иначе – площадь подграфика функции $p(x)$ на промежутке $[-5; 3]$ равна 1.

Поскольку плотность распределения вероятностей может принимать положительные значения на всей числовой прямой, то для вычисления вероятностей некоторых событий иногда нужно искать площади неограниченных фигур. Например, рассмотрим график плотности распределения вероятностей, изображённый на рисунке 20.9. В данном случае можно, например, сказать, что:

• вероятность того, что значение случайной величины t будет отрицательным, равна площади закрашенной в зелёный цвет неограниченной фигуры;

• вероятность того, что $t \geqslant 3$, равна площади закрашенной в голубой цвет неограниченной фигуры.

Кроме того, имеет место следующее утверждение.

Если функция $p(x)$ является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины t, то площадь подграфика функции $p(x)$ на всей числовой прямой равна 1.

Действительно, площадь подграфика функции на всей числовой прямой равна вероятности того, что значениями случайной величины являются действительные числа.

9. Равномерное распределение

Вернёмся к случайной величине t, с которой мы начали разговор в предыдущем пункте. Напомним, что значение t равно наугад выбранному числу на промежутке $[0; 1]$, где выбор организован так, чтобы все числа на промежутке $[0; 1]$ находились в «равных условиях». «Равные условия» для чисел промежутка $[0; 1]$ означают, что функция $p(x)$, плотность распределения вероятностей случайной величины t, является константой на отрезке $[0; 1]$, т. е.

$$p(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in [0; 1], \\ 0, \text{ если } x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

Обратите внимание, что площадь подграфика функции $p(x)$ на промежутке $[0; 1]$ равна 1 (рис. 20.10).

Рис. 20.9

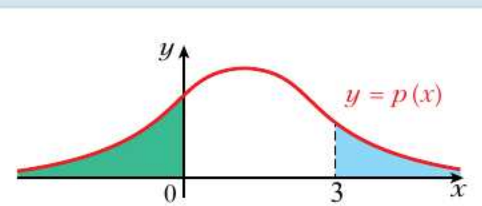
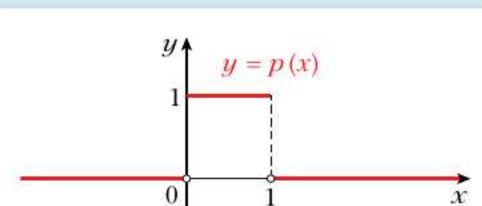


Рис. 20.10



Определение

Если плотность распределения вероятностей случайной величины t равна константе на некотором промежутке $[a; b]$, а вне этого промежутка равна нулю, то говорят, что случайная величина t имеет равномерное распределение на промежутке $[a; b]$.

<u>**Пример.**</u> Случайная величина t имеет равномерное распределение на промежутке $[-2; 5]$. Найдите её плотность распределения вероятностей.

Решение. Поскольку случайная величина t имеет равномерное распределение на промежутке $[-2; 5]$, то её плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} c, \text{ если } x \in [-2; 5], \\ 0, \text{ если } x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty). \end{cases}$$

Подберём константу c так, чтобы площадь подграфика функции $p(x)$ на промежутке $[-2; 5]$ была равной 1. Поскольку рассматриваемая фигура – прямоугольник с основанием $5 - (-2) = 7$ и высотой c, то $7c = 1$. Отсюда $c = \frac{1}{7}$.

Ответ: $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}, \text{ если } x \in [-2; 5], \\ 0, \text{ если } x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty). \end{cases}$ ◄

10. Почему так важны некоторые распределения?

Рассмотрим следующую задачу. В некоторой стране 100 млн человек имеют право голосовать. Центр изучения общественного мнения проводит опрос с целью установить, какой процент населения поддерживает партию A. Для этого опросили 10 000 избирателей, выбранных случайным образом, и на основании полученных данных, что 5708 человек поддержали партию A, сделали вывод: 57% голосующего населения страны поддерживает партию A. Означает ли это, что в стране ровно 57 млн избирателей гарантированно поддерживают партию A? По целому ряду причин это не так.

Прежде всего, фраза «100 млн человек» обычно означает, что речь идёт о числе, лишь приближённо равном 100 млн (с точностью до нескольких миллионов человек!). Далее, 10 000 опрошенных избирателей, хотя и были выбраны случайно, могли искажённо представить интересы всей страны. Также заметим, что сама дробь $\frac{5708}{10\,000} = 0{,}5708$ только приближённо равна 57%. Существуют и другие причины, заставляющие относиться с недоверием к тому, что в стране ровно 57 000 000 избирателей поддерживают партию A.

Тем не менее в жизни мы постоянно пользуемся такими оценками. Более того, абсолютно точный ответ сам по себе нас не очень и интересует. Нам намного важнее знать, что точный ответ не очень сильно отличается от рассматриваемой оценки. Например, если абсолютно точный процент избирателей, поддерживающих партию A, составляет 57,43816%, то

Итоги главы 4

Несовместные события

✓ Если в некотором опыте два события не могут произойти одновременно, то их называют несовместными.

Объединение, пересечение, дополнение событий

✓ Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит хотя бы одно из двух событий — A или B некоторого опыта, называют объединением событий A и B.
Объединение событий A и B обозначают $A \cup B$.

✓ Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит и событие A, и событие B, называют пересечением событий A и B.
Пересечение событий A и B обозначают $A \cap B$.

✓ Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда не происходит событие A, называют дополнением события A.
Дополнение события A обозначают $\bar{A}$.

✓ Если A и B — несовместные события некоторого испытания, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

✓ Если A и B — события некоторого испытания, то:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B)$.

Независимые события

✓ События A и B называют независимыми, если $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$.

✓ Если события некоторого испытания являются независимыми, то вероятность пересечения этих событий равна произведению их вероятностей.

Случайная величина

✓ Случайной величиной называют величину, значения которой определяются результатами испытания с числовыми исходами. Множество тех значений, которые она может принимать, называют множеством значений случайной величины.

Распределение вероятностей случайной величины

✓ Соответствие между значениями случайной величины и вероятностями, с которыми она их принимает, называют распределением вероятностей случайной величины.

Математическое ожидание

✓ Пусть случайная величина x имеет следующее распределение вероятностей:

Значение x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Число $M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$ называют математическим ожиданием случайной величины x.

Схема Бернулли

✓ Если испытание с двумя возможными исходами «У» и «Н», где вероятность исхода «У» равна p, повторяют n раз, то такую серию испытаний называют схемой Бернулли с параметрами n и p.

✓ Вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p ровно m испытаний завершатся успешным исходом, равна $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.

✓ Математическое ожидание количества успехов в схеме Бернулли с параметрами n и p равно np.

Упражнения для повторения курса алгебры

Делимость натуральных чисел. Признаки делимости

1. Какие из чисел 24, 75, 83, 378, 573, 898 делятся нацело: 1) на 2; 2) на 3?

2. Какие из чисел 28, 85, 108, 135, 240, 396 делятся нацело: 1) на 5; 2) на 9?

3. Найдите наибольший общий делитель чисел: 1) 24 и 42; 2) 18 и 30; 3) 128 и 192; 4) 328 и 624.

4. Найдите наименьшее общее кратное чисел: 1) 16 и 32; 2) 9 и 14; 3) 18 и 12; 4) 16 и 24.

5. Вместо звёздочки в записи 400* поставьте цифру так, чтобы полученное число было кратным: 1) 2; 2) 5; 3) 9; 4) 3. Рассмотрите все возможные случаи.

6. Неполное частное при делении двух двузначных чисел равно 9, а остаток – 8. Чему равно делимое?

7. Маша живёт в пятиэтажном доме в квартире № 40. В каждом подъезде на каждом этаже по 3 квартиры в порядке возрастания номеров: первая – слева, вторая – посередине, а третья – справа.

1) Какой номер подъезда, в котором живёт Маша?

2) На каком этаже живёт девушка?

3) Где расположена её квартира: слева, посередине или справа?

8. Какое число является делителем любого натурального числа?

9. Какое из чисел 4025, 7540, 2754, 6225 делится нацело на 3, но не делится нацело на 2?

10. Сколько существует двузначных чисел, кратных числу: 1) 5; 2) 9; 3) 7?

11. Может ли быть простым числом сумма четырёх последовательных натуральных чисел?

12. В парке посадили каштаны и дубы, причём на каждых 3 дуба приходилось 2 каштана. Сколько всего посадили деревьев в парке, если дубов посадили 24?

13. Сократимой или несократимой является дробь:

1) $\dfrac{7425}{10^5 - 1}$; 2) $\dfrac{10^{100} + 5}{35}$; 3) $\dfrac{10^{100} + 5}{36}$?

14. Может ли произведение нескольких простых чисел заканчиваться цифрой 0? Цифрой 5?

15. Простым или составным является число a, если оно кратно числу 25?

16. Кратна ли сумма:

1) $33^3 + 3$ числу 10;

2) $10^{10} + 5$ числу 3?

17. Книги можно расставить поровну на 12 полках или на 8 полках. Сколько имеется книг, если известно, что их больше 100, но меньше 140?

18. Яблоки можно разложить поровну в 12 пакетов или, тоже поровну, в 16 пакетов. Сколько имеется яблок, если известно, что их больше 80, но меньше 120?

19. Какое наименьшее натуральное число надо прибавить к числу 826, чтобы полученная сумма делилась нацело одновременно на 3 и на 10?

20. В саду растут яблони и вишни, причём яблонь в 3 раза больше, чем вишен. Какому из приведённых чисел может быть равным общее количество деревьев в саду?

1) 18; 2) 20; 3) 21; 4) 25.

21. При делении натурального числа n на 6 получили остаток 4. Чему равен остаток при делении числа $2n$ на 6?

22. Чему равен остаток при делении на 7 значения выражения $(5n + 8) - (5 - 2n)$, где n — любое натуральное число?

23. В каждом букете должно быть 3 красные и 4 белые розы. Какое наибольшее количество таких букетов можно составить из 36 красных и 45 белых роз?

24. Натуральные числа a и b таковы, что a — чётное, b — нечётное. Значение какого из данных выражений обязательно является чётным числом:

1) $a^2 + 3$; 3) $\frac{ab}{2}$;

2) $b(a + b)$; 4) $\frac{a^2}{2}$?

25. Натуральные числа a и b таковы, что a — чётное, b — нечётное. Какое из данных равенств возможно:

1) $\frac{a+1}{b-1} = 1$; 3) $\frac{a}{b} = 2$;

2) $ab = 25$; 4) $\frac{b}{a} = 4$?

26. Натуральные числа a и b таковы, что a — чётное, b — нечётное. Значение какого из данных выражений не может быть натуральным числом:

1) $\frac{4b}{3a}$; 2) $\frac{2a}{b}$; 3) $\frac{a^2}{b^2}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

27. Сколько натуральных делителей имеет произведение двух различных простых чисел?

28. Какую одну и ту же цифру надо приписать слева и справа к числу 25, чтобы полученное число было кратным 6?

29. Расположите в порядке убывания числа:

1) $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{13}{15}$; 2) $\frac{11}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{5}{12}$.

30. Найдите все натуральные значения c, при которых верно неравенство:

1) $\frac{6}{11} < \frac{c}{11} < 1$; 2) $\frac{2}{9} < \frac{c}{18} < \frac{5}{6}$.

31. Найдите все натуральные значения x, при которых верно неравенство $\frac{x}{9} < \frac{22}{45}$.

32. Сколько существует дробей:

1) со знаменателем 24, которые больше $\frac{3}{8}$, но меньше $\frac{2}{3}$;

2) со знаменателем 18, которые больше $\frac{7}{9}$, но меньше 1;

3) со знаменателем 28, которые больше $\frac{3}{7}$, но меньше $\frac{4}{7}$?

33. Расстояние между двумя городами легковой автомобиль проезжает за 5 ч, а грузовой – за 8 ч. Какой автомобиль проедет большее расстояние: легковой за 3 ч или грузовой за 5 ч?

34. Каким из дробей $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{10}{27}$, $\frac{14}{27}$ может быть равным x, чтобы было верным неравенство $\frac{17}{54} < x < \frac{41}{54}$?

35. Сколько существует правильных дробей со знаменателем 12?

36. Сколько можно составить неравных между собой правильных дробей, числителями и знаменателями которых являются числа:

1) 3, 5, 7, 11, 13, 17; 2) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

37. Сколько существует неправильных дробей с числителем 10?

38. Сколько можно составить неравных между собой неправильных дробей, числителями и знаменателями которых являются числа:

1) 7, 11, 13, 15, 17, 19, 23; 2) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12?

39. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{10}{15}$:

1) (0; 0,25); 2) (0,25; 0,5); 3) (0,5; 0,75); 4) (0,75; 1)?

40. Вычислите значение выражения:

1) $\frac{9}{11} - \frac{3}{7}$; 2) $\frac{11}{16} - \frac{9}{32}$; 3) $\frac{14}{15} - \frac{9}{10}$;

4) $\frac{3}{16}+\frac{7}{24}-\frac{5}{8}$; 6) $5\frac{2}{9}-2\frac{5}{7}$; 8) $\frac{5}{7}-0{,}6$;

5) $2\frac{3}{4}+6\frac{7}{10}$; 7) $4\frac{7}{30}-1\frac{11}{20}$; 9) $0{,}35+\frac{8}{15}$.

41. Вычислите значение выражения:

1) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{9\cdot 10}$; 2) $\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{3}{26\cdot 29}$.

42. Докажите, что:

1) $\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{24}>\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\ldots+\frac{1}{36}>\frac{1}{4}$.

43. Вычислите значение выражения:

1) $\left(\frac{13}{18}-\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{3}{20}$; 6) $2\frac{4}{9}:\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{9}\right)$;

2) $\frac{13}{18}-\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{20}$; 7) $(-5{,}16+5{,}02)\cdot(2{,}5-4)$;

3) $1\frac{3}{25}\cdot 2\frac{1}{7}-1\frac{8}{9}\cdot\frac{27}{170}$; 8) $\frac{5}{32}:\frac{5}{12}-3\frac{1}{4}:1\frac{2}{11}$;

4) $\left(9-2\frac{1}{7}\cdot 3\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{27}{35}$; 9) $\left(7-1\frac{5}{9}:\frac{7}{24}\right):\left(-\frac{25}{36}\right)$;

5) $\left(5\frac{1}{16}-1\frac{1}{8}\right)\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{14}\right)$; 10) $\left(28{,}9:\left(-\frac{17}{20}\right)-2{,}08:\left(-\frac{1}{25}\right)\right):\left(-1\frac{2}{7}\right)$.

44. Какую из данных десятичных дробей нельзя преобразовать в конечную десятичную дробь:

1) $\frac{11}{16}$; 2) $\frac{24}{600}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{18}{125}$?

45. Чему равно значение выражения $(1-2)-(3-4)-(5-6)-\ldots-(99-100)$?

46. Число a – положительное, а число b – отрицательное. Значение которого из данных выражений наибольшее:

1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) $-\frac{a}{b^2}$; 3) $\frac{a^2}{b}$; 4) $\frac{b}{a}$?

47. Сумма 1000 натуральных чисел равна 1001. Чему равно их произведение?

48. Из чисел –8, –7, –4, 3, 6, 5, 9 выбрали два числа и нашли их произведение. Какое наибольшее значение может принимать это произведение?

49. Числа a и b таковы, что $a>0$, $b<0$. Какое из данных выражений может принимать отрицательные значения:

1) $a-b$; 2) $|a+b|$; 3) a^3b^2; 4) $a+b$?

50. Числа a и b таковы, что $a+b<a$. Какое из утверждений верно:

1) $b>0$; 2) $b<0$; 3) $b=0$; 4) $b\geqslant 0$?

51. Один тракторист может вспахать поле за 12 ч, а другой — за 8 ч. Какую часть поля вспашут они, работая вместе, за 3 ч?

52. Бассейн можно наполнить водой за 10 ч через одну трубу и опорожнить за 15 ч через другую. Какая часть бассейна останется незаполненной водой через 3 ч после того, как открыли краны на обеих трубах?

53. Одна швея может выполнить некоторый заказ за 2 ч, а другая — за 3 ч. Хватит ли им 1 ч, чтобы, работая вместе, выполнить заказ?

54. В магазин завезли 540 кг фруктов, из них $\frac{4}{9}$ составляли яблоки, а остальное — груши. Сколько килограммов груш завезли в магазин?

55. За три дня проложили 105 м кабеля. За первый день проложили $\frac{3}{7}$ кабеля, а за второй — $\frac{7}{12}$ оставшегося. Сколько метров кабеля проложили за третий день?

56. Учебники составляют $\frac{1}{4}$ всех книг школьной библиотеки, а учебники по математике — $\frac{8}{25}$ всех учебников. Какую часть всех книг библиотеки составляют учебники по математике?

57. Известно, что $\frac{1}{3}$ одного положительного числа равна $\frac{1}{4}$ другого положительного числа. Какое из этих чисел больше?

58. Требуется расфасовать $27\frac{1}{2}$ кг сахара в пакеты по $\frac{3}{4}$ кг каждый. Сколько получится полных пакетов?

59. Сколько банок ёмкостью 0,3 л требуется, чтобы разлить в них 4 л мёда?

60. Один маляр может отремонтировать кабинет математики за 48 ч, а другой маляр — за 96 ч. За сколько часов, работая вместе, они отремонтируют этот кабинет?

61. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 6 ч. Один из них, работая самостоятельно, может выполнить эту работу за 10 ч. За сколько часов её может выполнить самостоятельно другой рабочий?

62. Пассажирский поезд проходит расстояние между двумя городами за 6 ч. Если одновременно из этих городов выйдут навстречу друг другу пассажирский и товарный поезда, то они встретятся через 3 ч 20 мин после начала движения. За какое время товарный поезд проходит расстояние между городами?

63. Одна бригада может выполнить заказ за 8 дней, а другая — за 12 дней. Сначала первая бригада работала 2 дня, а затем её сменила вторая. За сколько дней был выполнен заказ?

64. За первый день в библиотеку завезли $\frac{5}{8}$ всех книг, а за второй — остальные 72 книги. Сколько книг завезли в библиотеку за два дня?

65. В саду растут яблони, сливы и груши. Яблони составляют $\frac{7}{18}$ всех деревьев, сливы — $\frac{15}{22}$ остальных деревьев, а груши — 35 деревьев. Сколько всего деревьев в саду?

Множества. Операции над множествами

66. Какое из данных утверждений неверно:

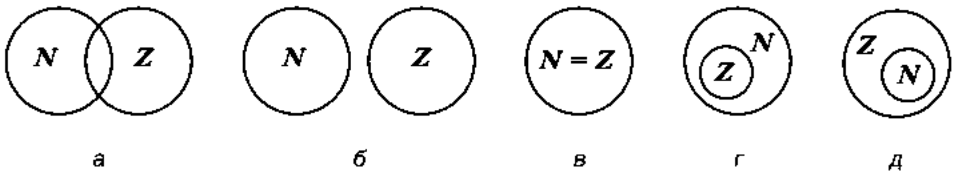
1) -2 — действительное число;
2) -2 — рациональное число;
3) -2 — целое число;
4) -2 — натуральное число?

67. Верно ли утверждение:

1) $1 \in \boldsymbol{N}$;
2) $1 \in \boldsymbol{Z}$;
3) $1 \in \boldsymbol{Q}$;
4) $1 \in \boldsymbol{R}$;
5) $0 \in \boldsymbol{N}$;
6) $0 \notin \boldsymbol{Z}$;
7) $0 \in \boldsymbol{R}$;
8) $-3{,}2 \in \boldsymbol{N}$;
9) $-3{,}2 \in \boldsymbol{R}$;
10) $-\frac{5}{9} \in \boldsymbol{Q}$;
11) $-\frac{5}{9} \notin \boldsymbol{R}$;
12) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{Q}$;
13) $\sqrt{5} \in \boldsymbol{Q}$;
14) $\sqrt{5} \in \boldsymbol{R}$;
15) $\frac{\pi}{2} \in \boldsymbol{Q}$;
16) $\frac{\pi}{2} \in \boldsymbol{R}$?

68. Укажите диаграмму Эйлера (рис. 1), на которой правильно изображено соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$.

Рис. 1



69. Какое из данных чисел является рациональным:

1) $\sqrt{2{,}5}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) π; 4) $\sqrt{0{,}04}$?

70. Верно ли утверждение:

1) любое целое число является рациональным;
2) любое натуральное число является целым;
3) любое натуральное число является рациональным;
4) любое рациональное число является целым;

5) любое действительное число является рациональным;
6) любое иррациональное число является действительным?

71. Задайте перечислением элементов множество:
1) правильных дробей со знаменателем 6;
2) цифр числа 2 341 432.

72. Верно ли равенство:
1) $A \cup \varnothing = A$; 3) $A \cup \varnothing = \varnothing$;
2) $A \cap \varnothing = A$; 4) $A \cap \varnothing = \varnothing$?

73. Найдите пересечение множеств A и B, если:
1) A — множество делителей числа 36, B — множество чисел, кратных числу 6;
2) A — множество однозначных чисел, B — множество составных чисел;
3) A — множество чётных чисел, B — множество простых чисел;
4) A — множество однозначных чисел, B — множество чисел, кратных числу 10;
5) A — множество простых чисел, B — множество составных чисел.

74. Найдите объединение множеств A и B, если:
1) A — множество цифр числа 6694, B — множество цифр числа 41 686;
2) A — множество делителей числа 15, B — множество делителей числа 20.

75. В классе 30 учащихся. Из них 20 учащихся занимаются в спортивных секциях, а 16 учащихся поют в школьном хоре. Сколько спортсменов поют в хоре?

Пропорциональные величины. Процентные расчёты

76. У мальчика есть некоторая сумма денег, за которую он может приобрести 18 одинаковых тетрадей. Сколько тетрадей он сможет приобрести за эту же сумму денег, если они: 1) подешевеют в 2 раза; 2) подорожают в 1,5 раза?

77. Из 12 м батиста сшили 8 одинаковых блузок. Сколько таких блузок можно сшить из 18 м батиста?

78. На двух книжных полках стояло поровну книг. Потом треть книг с первой полки переставили на вторую. Во сколько раз на второй полке стало больше книг, чем на первой?

79. Шесть одинаковых экскаваторов, работая вместе, вырыли котлован за 18 ч. За сколько часов 4 таких экскаватора, работая вместе, выроют 2 таких котлована?

80. Известно, что из 50 кг муки получают 70 кг хлеба. Сколько хлеба получают из 150 кг муки? Сколько требуется муки, чтобы испечь 14 кг хлеба?

81. При засолке 10 кг рыбы кладут 3,5 кг соли. Сколько требуется соли, чтобы засолить 24 кг рыбы?

82. Если рабочий будет изготавливать ежедневно по 10 деталей, то он выполнит заказ за 24 дня. За сколько дней он выполнит заказ, если будет изготавливать ежедневно по 12 деталей?

83. Огурцами засадили $\frac{1}{3}$ огорода, а помидорами — 30%. Какими растениями, огурцами или помидорами, засадили большую площадь?

84. Из купленных тетрадей 20% были в клетку, а остальные — в линейку. Во сколько раз больше купили тетрадей в линейку, чем в клетку?

85. В солнечный день кваса продают на 50% больше, чем в пасмурный. Во сколько раз в пасмурный день продают меньше кваса, чем в солнечный?

86. Сплав содержит 9% цинка. Сколько килограммов цинка содержится в 270 кг сплава?

87. От верёвки отрезали 50% её длины, а затем 20% остатка. Сколько процентов от первоначальной длины верёвки осталось?

88. Сплав меди и олова массой 5,5 кг содержит меди на 20% больше, чем олова. Найдите массу меди в этом сплаве.

89. Цену товара сначала увеличили на 50%, а затем уменьшили на 50%. Увеличилась или уменьшилась и на сколько процентов первоначальная цена товара?

90. Цену товара сначала снизили на 20%, а затем повысили на 30%. Как и на сколько процентов изменилась первоначальная цена вследствие этих двух переоценок?

91. Вкладчик положил в банк 120 000 р. на два разных счёта. По первому из них банк выплачивает 5% годовых, а по второму — 7% годовых. Через год вкладчик получил по 5%-му вкладу на 2400 р. процентных денег больше, чем по второму. Сколько рублей он положил на каждый счёт?

92. Смешали 50%-й и 20%-й растворы кислоты и получили 600 г 30%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора смешали?

93. Сколько килограммов 30%-го и сколько килограммов 40%-го сплавов меди надо взять, чтобы получить 50 кг 36%-го сплава?

94. За первый день турист прошёл 16 км, что составляет 40% длины туристического маршрута. Найдите длину этого маршрута.

95. Руда содержит 70% железа. Сколько надо взять руды, чтобы получить 84 т железа?

96. При сушке грибы теряют 92% своей массы. Сколько свежих грибов надо взять, чтобы получить 24 кг сушёных?

97. В кинозале 480 мест, из которых во время сеанса было занято 408. Сколько процентов мест было занято?

98. К 200 г 10%-го раствора соли долили 300 г воды. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

99. Смешали 72 г 5%-го раствора соли и 48 г 15%-го раствора соли. Найдите процентное содержание соли в полученном растворе.

100. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 2 раза?

101. На сколько процентов уменьшится площадь квадрата, если каждую его сторону уменьшить в 2 раза?

102. Цена товара выросла с 1600 р. до 1640 р. На сколько процентов выросла цена товара?

103. Цена товара снизилась с 3200 р. до 2560 р. На сколько процентов снизилась цена товара?

104. Вкладчик положил в банк 60 000 р. под 10% годовых. Сколько денег будет на его счёте через 2 года?

105. Предприниматель взял в банке кредит в размере 300 000 р. под некоторый процент годовых. Через два года он вернул в банк 430 200 р. Под какой процент годовых даёт кредиты этот банк?

106. В 2013 г. в некотором городе было 60 000 жителей, а в 2015 г. — 54 150 жителей. На сколько процентов ежегодно уменьшалось население этого города?

107. Вкладчик положил в банк 30 000 р. За первый год ему начислили некоторый процент годовых, а во второй год банковский процент был уменьшен на 6%. На конец второго года на счёте стало 34 320 р. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

108. К сплаву меди и цинка, который содержал меди на 4 кг больше, чем цинка, добавили 4 кг меди. Вследствие этого процентное содержание меди в сплаве увеличилось на 7,5%. Сколько килограммов меди содержал сплав вначале?

109. Водно-солевой раствор содержал 4 кг соли. Через некоторое время 4 кг воды испарилось, вследствие чего концентрация соли в растворе увеличилась на 5%. Какой была первоначальная масса раствора?

110. Водно-солевой раствор содержал 3 кг соли, концентрация которой была менее 20%. К этому раствору добавили 6 кг соли, после чего концентрация соли увеличилась на 15%. Какой была первоначальная масса раствора?

111. Некоторая выборка состоит из 30 чисел, среди которых число 7 встречается 12 раз, число 9 встречается 8 раз и число 15 встречается 10 раз. Найдите среднее значение данной выборки.

112. На графике, изображённом на рисунке 2, отражены объёмы продажи ручек в магазине канцтоваров в течение 6 месяцев. Сколько в среднем продавали ручек за один месяц?

Рис. 2

113. Среднее значение выборки 7, 10, y, 14 равно 11. Чему равен y?

114. Средний рост 10 баскетболистов равен 195 см, а средний рост семи из них – 192 см. Какой средний рост остальных трёх баскетболистов?

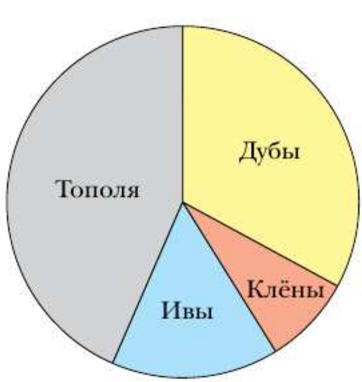
115. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах совокупности данных:

1) 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 22;
2) 5, 12, 12, 14, 14, 8, 12.

116. На рисунке 3 изображена диаграмма, отображающая распределение деревьев, растущих в парке. Какие из данных утверждений верны:

1) дубов в парке больше, чем тополей;
2) тополя составляют менее 50% всех деревьев;
3) клёнов и ив растёт больше, чем дубов;
4) дубы составляют более 25% всех деревьев;

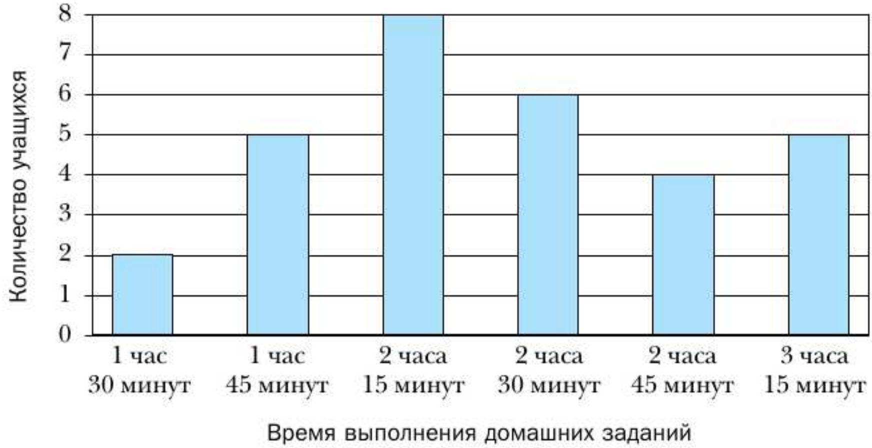
Рис. 3



5) тополя и ивы составляют менее половины всех деревьев?

117. Среди учащихся 11 класса провели опрос: сколько времени они тратят ежедневно на выполнение домашних заданий. Результаты опроса представили в виде гистограммы, изображённой на рисунке 4. Найдите моду и среднее значение данной выборки.

Рис. 4



118. Опросив группу мальчиков-девятиклассников об их размере обуви, составили таблицу:

Размер обуви	26,5	27	27,5	28	28,5	29	29,5
Количество мальчиков	5	8	7	7	6	5	2

Найдите относительную частоту, соответствующую размеру обуви 28.

119. По результатам диктанта по русскому языку 25 учащихся 11 класса составили таблицу, в которой отобразили распределение количества ошибок, сделанных одним учащимся:

Количество ошибок	0	1	2	3	4
Количество учащихся	5	4	6	8	2

Найдите моду и среднее значение выборки, постройте соответствующую гистограмму.

120. В течение первых 10 дней мая температура воздуха в 6 ч утра была такой: 16 °C, 14 °C, 12 °C, 16 °C, 15 °C, 15 °C, 13 °C, 15 °C, 17 °C, 14 °C. Найдите меры центральной тенденции полученной совокупности данных. Заполните частотную таблицу:

Температура воздуха, °C	
Частота	
Относительная частота, %	

121. Учёт посещаемости школы 24 учащимися 11 класса показал, что в первом полугодии ими было пропущено следующее количество дней: 4, 1, 4, 1, 4, 5, 4, 2, 3, 3, 5, 4, 5, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 8, 4, 3.

1) Составьте частотную таблицу.

2) Найдите среднее значение и моду данной выборки.

3) Постройте соответствующую гистограмму.

122. На подносе лежат 3 яблока, 2 груши и 7 абрикосов. Какова вероятность того, что выбранный наугад фрукт окажется яблоком?

123. Из множества чётных натуральных чисел, меньших 20, наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что выбранное число будет делиться нацело на 7?

124. На двух параллельных прямых обозначили точки — 3 на одной и 1 на второй. Из этих 4 точек наугад выбирают три. Какова вероятность того, что выбранные точки являются вершинами треугольника?

125. Одновременно подбросили 3 монеты. Какова вероятность того, что ровно на двух из этих монет выпадет герб?

126. Два игральных кубика подбросили одновременно. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на кубиках, равняется 8?

127. Игральный кубик подбросили 7 раз, и при этом каждый раз выпадала шестёрка. Какова вероятность того, что при следующем подбрасывании выпадет ещё одна шестёрка?

128. В 11 «А» классе учатся 24 школьника. Ученики этого класса Витя и Максим вместе со своими одноклассниками пошли в кинотеатр. Ряд кинотеатра содержит 24 места, на которые случайным образом расселись 24 школьника. Какова вероятность того, что Витя и Максим будут сидеть рядом?

129. На окружности и прямой, не пересекающей эту окружность, обозначили 12 точек — 5 на окружности и 7 на прямой. Из этих 12 точек наугад выбирают три. Какова вероятность того, что выбранные точки являются вершинами треугольника?

130. Вероятность того, что изготовленная деталь будет бракованной, составляет 0,5%. Найдите вероятность того, что из трёх наугад выбранных деталей не будет ни одной бракованной.

131. Андрей родился в ноябре. Найдите вероятность того, что среди четырёх его друзей найдётся кто-то, родившийся с Андреем в одном месяце.

132. В магазине обуви «Богатырь» предлагается обувь 44 размера и выше. Вероятность того, что в определённый день будет продана пара обуви 46 размера, равна 24%, 47 размера – 15%, 48 и выше – 39%. Найдите вероятность того, что в этот день будет продана пара обуви 46 размера и выше.

133. Вероятность того, что наугад выбранный мужчина носит усы – 12%, бороду – 8%, усы и бороду одновременно – 6%. Найдите вероятность того, что наугад выбранный мужчина носит усы или бороду.

134. Монету подбрасывают 5 раз. Найдите вероятность того, что при этом выпало не меньше 4 гербов, если известно, что в первых четырёх подбрасываниях выпало не меньше 3 гербов.

135. Стрелок попадает в цель с вероятностью 80%. Какова вероятность того, что из 5 независимых выстрелов, произведённых этим стрелком, в цель попадут ровно 4?

136. Из чисел 1 и 2 игрок наугад выбирает одно. Затем он бросает игральный кубик один раз, если выбрано число 1, и два раза, если выбрано число 2. Какова вероятность того, что на кубике выпадет хотя бы одна шестёрка?

Рациональные выражения

137. Докажите, что не существует таких значений x и y, при которых многочлены $5x^2 - 8xy - 3y^2$ и $-4x^2 + 8xy + 5y^2$ одновременно принимали бы отрицательные значения.

138. Расставьте скобки так, чтобы было тождеством равенство:

1) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 4 = 5$;
2) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 4 = -5$;
3) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 4 = 3$.

139. Замените звёздочки одночленами так, чтобы образовалось тождество:

1) $(x + 3)(* + 5) = 4x^2 + * + *$; 2) $(x - 3)(x + *) = * + * - 18$.

140. При некотором значении y значение выражения $y^2 - 4y + 2$ равно 5. Найдите при этом значении y значение выражения $3y^2 - 12y + 10$.

141. При некоторых значениях a и b выполняются равенства $a + b = 8$, $ab = 3$. Найдите значение выражения $a^2 + b^2$ при этих же значениях a и b.

4) $\frac{4b}{3b-24}+\frac{3b}{16-2b}$;

5) $\frac{3p}{3p+q}-\frac{9p^2}{9p^2+6pq+q^2}$;

6) $\frac{4}{m^2-36}-\frac{2}{m^2-6m}$;

7) $8-\frac{3a+8c}{c}$;

8) $\frac{m^2-n^2}{m+4n}+m-4n$;

9) $x-\frac{49}{x-7}-7$.

152. Упростите выражение:

1) $\frac{m+1}{m-1}-\frac{m^2+1}{m^2-1}$;

2) $\frac{b^2}{2ab+a^2+b^2}+\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{3a}{9a^2-1}-\frac{a+2}{3a^2+a}$;

4) $\frac{k-2}{k^2+6k+9}-\frac{k}{k^2-9}$;

5) $\frac{x-20}{x^2+5x}+\frac{x}{x+5}-\frac{x-5}{x}$;

6) $\frac{y+3}{y-3}-\frac{y-3}{y+3}-\frac{36}{y^2-9}$.

153. Докажите тождество:

1) $\frac{a}{a-b}-\frac{a+b}{a}+\frac{b^2}{ab-a^2}=0$;

2) $\frac{8a^2+4}{4a^2-1}-\frac{2a-2}{2a+1}-\frac{2a+1}{2a-1}=\frac{1}{2a-1}$;

3) $\frac{a+5}{a^2-5a}+\frac{a-5}{5a+25}+\frac{20}{25-a^2}=\frac{a-5}{5a}$;

4) $\frac{b+2}{2a+1}-\frac{b^2-2b}{2ab-2+b-4a}=\frac{2}{2a+1}$.

154. Выполните умножение:

1) $\frac{a^3}{b^4}\cdot\frac{b^2}{a^3}$;

2) $\frac{4m^2}{k^6}\cdot\frac{mk^6}{16}$;

3) $\frac{a}{7b}\cdot 7a$;

4) $20x^{16}\cdot\frac{y^4}{5x^4}$;

5) $\frac{17x^4}{y^8}\cdot\frac{y^6}{34x^7}$;

6) $\frac{8k^9}{9mp}\cdot\frac{81m^2}{56k^6p^2}$.

155. Найдите частное:

1) $\frac{14}{a^2}:\frac{28}{a^6}$;

2) $\frac{b^5}{6}:\frac{b^3}{48}$;

3) $\frac{45}{m^8}:\frac{36}{m^7n^2}$;

4) $\frac{6x^7}{y^8}:(36x^7y^2)$;

5) $35m^4:\frac{21m^3}{n^2}$;

6) $\frac{16a^3b^8}{33c^5}:\left(-\frac{12a^2}{55c^6}\right)$.

156. Упростите выражение:

1) $\frac{4x+4y}{x^6}\cdot\frac{x^3}{x+y}$;

2) $\frac{24b}{b^2-16}\cdot\frac{b-4}{3b}$;

3) $\frac{8}{m^2-25n^2}\cdot(m-5n)$;

4) $\frac{3c+6}{9c^2-6c+1}\cdot\frac{3c-1}{c+2}$;

5) $\frac{a^2-4a+4}{a+2}:(a-2)$;

6) $(p^2-36k^2):\frac{p+6k}{p}$;

7) $\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{b+a}{b-a}$; 8) $\dfrac{a^4-16}{a^3-4a}\cdot\dfrac{a}{4+a^2}$; 9) $\dfrac{a^2-7ab}{8b}:\dfrac{7b^2-ab}{32a}$.

157. Известно, что $x-\dfrac{1}{x}=6$. Найдите значение выражения $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

158. Известно, что $3x+\dfrac{1}{x}=-3$. Найдите значение выражения $9x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

159. Дано: $x^2+\dfrac{16}{x^2}=56$. Найдите значение выражения $x+\dfrac{4}{x}$.

160. Дано: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$. Найдите значение выражения $x-\dfrac{1}{x}$.

161. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^2+ab+5a+5b}{a^2+2ab+b^2}:\dfrac{a^2-25}{a^2+ab-5a-5b}$;

2) $\dfrac{a^2-a+ab-b}{a^2-a-ab+b}:\dfrac{a^2+a+ab+b}{a^2+a-ab-b}$.

162. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{m}{m-2}-1\right):\dfrac{6m}{mn-2n}$;

2) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right):\dfrac{a+b}{2ab}$;

3) $\dfrac{6x}{x+2}-\dfrac{x-6}{3x+6}\cdot\dfrac{72}{x^2-6x}$;

4) $\left(a-\dfrac{15a-25}{a+5}\right):\dfrac{a^2-5a}{a+5}$;

5) $\dfrac{k+4}{k^2-6k+9}:\dfrac{k^2-16}{2k-6}-\dfrac{2}{k-4}$;

6) $\left(\dfrac{m+1}{m-1}-\dfrac{m-1}{m+1}\right):\dfrac{4m}{1-m^2}$;

7) $\dfrac{2x}{x^2-1}:\left(\dfrac{1}{x^2+2x+1}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$;

8) $\left(\dfrac{2a-6}{a^2-4a+4}-\dfrac{a-4}{a^2-2a}\right):\dfrac{a^2-8}{a^3-4a}$;

9) $\dfrac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\dfrac{2a-1}{3a-2}+\dfrac{a+6}{2-a}$;

10) $\dfrac{b^3+2b}{b^2-1}:\left(\dfrac{b+1}{2b^2-3b+1}-\dfrac{1}{b^2-1}\right)$.

163. Из данного равенства выразите переменную a через остальные переменные:

1) $\dfrac{3}{a}=b+\dfrac{2}{c}$; 2) $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{c}$; 3) $\dfrac{a+b}{a-b}=c$.

Рациональные уравнения. Системы алгебраических уравнений

164. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+2}{x^2-4}=0$; 3) $\dfrac{x+2}{x+2}=1$; 5) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}=0$;

2) $\dfrac{x^2-4}{x+2}=0$; 4) $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}=0$; 6) $\dfrac{10-4x}{x+9}+\dfrac{6x+8}{x+9}=0$.

165. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2x-1}{2x+1}-\dfrac{2x+1}{2x-1}=\dfrac{4}{1-4x^2}$;

2) $\dfrac{x^2+8x}{x+10}=\dfrac{20}{x+10}$;

3) $\dfrac{x^2-4}{x+1}=\dfrac{3x}{x+1}$;

4) $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$;

5) $\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{2x+18}{x^2-9}$;

6) $\dfrac{10}{x^2-5x}-\dfrac{x-3}{x-5}=\dfrac{1}{x}$;

7) $\dfrac{4x}{x^2-4x+4}-\dfrac{x+2}{x^2-2x}=\dfrac{1}{x}$;

8) $\dfrac{4}{x^2-49}-\dfrac{2}{x^2-7x}+\dfrac{x-4}{x^2+7x}=0$.

166. Для каждого значение a решите уравнение:

1) $\dfrac{x-4}{x-a}=0$;

2) $\dfrac{x-a}{x+3}=0$;

3) $\dfrac{(a-4)(x-a)}{x-3}=0$;

4) $\dfrac{(x-a)(x+5)}{x-8}=0$;

5) $\dfrac{(x+4)(x-2)}{x-a}=0$;

6) $\dfrac{x-a}{(x+4)(x-2)}=0$.

167. При каких значениях a уравнение $\dfrac{x+a}{x^2-1}=0$ не имеет корней?

168. При каких значениях a уравнение $\dfrac{(x-a)(x-4a)}{x+12}=0$ имеет единственный корень?

169. Решите уравнение:

1) $x^4-10x^2+24=0$;

2) $x^4+2x^2-24=0$;

3) $x^4-3x^2-70=0$;

4) $4x^4-5x^2+1=0$.

170. Решите уравнение:

1) $(x^2+6x)^2+(x^2+6x)-56=0$;

2) $(x^2+4x+3)(x^2+4x+5)=15$;

3) $\dfrac{x^4}{(x+4)^2}+\dfrac{23x^2}{x+4}-50=0$;

4) $\dfrac{x+3}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{3}{2}$.

171. Решите уравнение:

1) $x^2-2x+\dfrac{5}{x+8}=\dfrac{5}{x+8}+80$;

2) $x^2+4(\sqrt{x})^2-21=0$.

172. При каком значении b имеет один корень уравнение:

1) $2x^2+8x-b=0$;

2) $5x^2-bx+20=0$?

173. Докажите, что при любом значении p имеет два корня уравнение:

1) $2x^2-px-1=0$;

2) $x^2+px+p-3=0$.

174. При каком значении b имеет один корень уравнение:

1) $bx^2+x+1=0$;

2) $(b+1)x^2+(b-1)x-2=0$?

175. Число 7 является корнем уравнения $x^2+px-28=0$. Найдите значение p и второй корень уравнения.

176. Число $\dfrac{1}{3}$ является корнем уравнения $3x^2-bx+2=0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.

177. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2 + 2x - 11 = 0$. Не решая это уравнение, найдите значение выражения $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

178. При каком значении b корни уравнения $x^2 + bx - 7 = 0$ являются противоположными числами? Найдите эти корни.

179. Один из корней уравнения $x^2 - 8x + c = 0$ на 6 меньше другого. Найдите значение c и корни уравнения.

180. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 5x + m = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - 3x_2 = 20$. Найдите корни уравнения и значение m.

181. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 8x + 5 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 - x_2)^2$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

182. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 2 больше соответствующих корней уравнения $x^2 + 7x - 4 = 0$.

183. Составьте квадратное уравнение, корни которого в 3 раза меньше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 8x + 3 = 0$.

184. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 7x - 3y = 23; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 5y = 6, \\ 6x + 5y = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x + 7y = 38, \\ 3x - 4y = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 7, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{2y}{3} = -4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{p+3}{2} - \dfrac{q+2}{3} = 2, \\ \dfrac{p-1}{8} + \dfrac{q-1}{6} = 2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{7x+1}{4} - \dfrac{2x-3}{3} = \dfrac{3x-y}{2}, \\ \dfrac{x-3y}{3} + \dfrac{x+y}{2} = x - y. \end{cases}$

185. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $M(3; 3)$ и $E(1; 7)$. Запишите уравнение этой прямой.

186. При каких значениях a система уравнений:

1) $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 4x + 7y = a \end{cases}$ не имеет решений;

2) $\begin{cases} 5x + ay = 6, \\ 20x - 16y = 24 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений;

3) $\begin{cases} ax + 2y = 8, \\ 7x - 4y = -18 \end{cases}$ имеет единственное решение?

187. Решите уравнение:

1) $(x-y)^2+(x-9)^2=0$;

2) $(x-3y+1)^2+x^2-8xy+16y^2=0$;

3) $|x+3y-4|+(2x-6y+3)^2=0$;

4) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$.

188. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+3y=1, \\ x^2+2xy-y^2=-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+xy-5y=-3, \\ 4x-y=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=-5, \\ 4x^2+6y=13. \end{cases}$

189. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

1) прямой $y=2-5x$ и параболы $y=x^2+x-5$;

2) прямой $x-y+5=0$ и окружности $(x+3)^2+(y-1)^2=13$;

3) прямой $y=3x-10$ и окружности $x^2+y^2=10$;

4) парабол $y=4x^2+5x+2$ и $y=-2x^2-3x-2$.

190. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=64, \\ x-y=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x^2-6xy+y^2=9, \\ 2x^2+2xy-y^2=11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-xy=-6, \\ y^2-xy=22; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2+2y^2=18, \\ 3x^2-2y^2=12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy-y=-12, \\ 5x-xy=1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+4y^2=8, \\ xy=2. \end{cases}$

191. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y+xy=4, \\ xy(x+y)=-21; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{15}{4}, \\ 2x-3y=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{x-y}-\dfrac{3(x-y)}{3x+y}=-2, \\ x^2+xy-y^2=-20. \end{cases}$

192. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y-x=0, \\ 2x+y=-6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=-1, \\ 2x+2y=-3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-y=6, \\ x+y=6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+2)^2+y^2=10, \\ x-y+4=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy=8, \\ x+y=-6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$

193. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = (x-3)^2, \\ xy = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y + x = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ xy = 2. \end{cases}$

194. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = a: \end{cases}$

1) имеет единственное решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

195. Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |x| = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a + |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 8? \end{cases}$

Числовые неравенства и их свойства. Линейные и квадратичные неравенства и их системы. Метод интервалов

196. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:
1) $(a+8)(a-7) > (a+10)(a-9)$; 2) $(a+6)^2 - 3 < (a+5)(a+7)$.

197. Докажите, что:
1) $a(a-8) > 2(a-13)$ при всех действительных значениях a;
2) $x^2 + 4y^2 + 6x + 4y + 10 \geqslant 0$ при всех действительных значениях x и y;
3) $x^2 + 10xy + 26y^2 - 12y + 40 > 0$ при всех действительных значениях x и y;
4) $ab(a+b) \leqslant a^3 + b^3$, если $a < 0$, $b < 0$;
5) $m^3 + 2m^2 - 4m - 8 > 0$, если $m > 2$;
6) $\dfrac{a^2+5}{\sqrt{a^2+4}} > 2$ при всех действительных значениях a.

198. Дано: $-4 < x < 2$. Оцените значение выражения: 1) $3x - 1$; 2) $8 - 5x$.

199. Дано: $2 < x < 6$. Оцените значение выражения $\dfrac{3}{x}$.

200. Дано: $2 < x < 6$ и $3 < y < 4$. Оцените значение выражения:
1) $x + y$; 3) xy; 5) $5x + 2y$;
2) $x - y$; 4) $\dfrac{x}{y}$; 6) $3x - 4y$.

201. Оцените длину средней линии трапеции с основаниями x см и y см, если $8 < x < 12$, $7 < y < 14$.

202. Оцените периметр и площадь квадрата со стороной x см, если $10 < x < 13$.

203. Каково множество решений неравенства:

1) $(x+2)^2 \geqslant 0$; 3) $(x+2)^2 > 0$; 5) $0x < -5$; 7) $0x < 5$;
2) $(x+2)^2 \leqslant 0$; 4) $(x+2)^2 < 0$; 6) $0x \geqslant -5$; 8) $0x \geqslant 5$?

204. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x-4}{x-4} > 0$; 3) $\dfrac{x-4}{x-4} > \dfrac{1}{4}$; 5) $\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^2 \geqslant 0$;

2) $\dfrac{x-4}{x-4} \geqslant 0$; 4) $\dfrac{x-4}{x-4} \leqslant 1$; 6) $\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^2 > 0$.

205. Решите неравенство:

1) $8x + 4 \leqslant 30 - 5x$; 4) $0{,}3(8 - 3y) \leqslant 3{,}2 - 0{,}8(y - 7)$;

2) $9 - 4x < 6x - 25$; 5) $\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{x+2}{6} \leqslant 4$;

3) $\dfrac{4}{9}x + 3 < \dfrac{1}{3}x - 2$; 6) $\dfrac{2-5x}{4} - \dfrac{x-3}{5} < \dfrac{x-1}{10}$.

206. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $3x + 9 > 5x - 7$; 2) $14x^2 - (2x - 3)(7x + 4) \leqslant 14$.

207. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $x - 5 < 3x + 8$; 2) $18x^2 - (3x - 2)(6x + 5) \leqslant 20$.

208. Сколько целых отрицательных решений имеет неравенство

$x - \dfrac{x+7}{4} - \dfrac{5x+40}{12} < \dfrac{4x-5}{3}$?

209. Сколько натуральных решений имеет неравенство $\dfrac{1-3x}{4} \geqslant \dfrac{1}{5} - \dfrac{5x+4}{8}$?

210. Решите неравенство:

1) $(x+5)(x-1) \leqslant 1 + (x+2)^2$; 3) $(6x-1)^2 - 12x(3x-1) \geqslant 1$;

2) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+12}{6} > \dfrac{x-3}{3}$; 4) $(y+4)(y-6) - (y-1)^2 > -25$.

211. При каких значениях a уравнение:

1) $x^2 + x - a = 0$ не имеет корней;
2) $2x^2 - 16x + 5a = 0$ имеет хотя бы один действительный корень?

212. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 7x - 1 \geqslant 5x - 3, \\ 3x + 6 \geqslant 8x - 14; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{5x-10}{6} > \dfrac{2x+1}{3}, \\ \dfrac{3x+1}{2} - 4x > 5 - \dfrac{3x-2}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0{,}6(x-6) \leqslant x + 2, \\ 4x + 7 > 2(x + 6{,}5); \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x - 4 > 3(x+1) - 10, \\ 0{,}2(5 - x) \leqslant 1{,}5(x + 1{,}4) + 0{,}6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x(x-3) - x(2+3x) < 4, \\ 6x^2 - (2x-3)(3x+4) < 17; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 1 - \dfrac{3x-8}{7} > 3x, \\ x(x-4) - (x+1)(x-5) < 2. \end{cases}$

213. Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} 6x - 7 < 3x + 17, \\ 8 - 2x > 14 - 5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x + 20 \geqslant x + 5, \\ 2x + 2 \geqslant 4x - 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 1 > 2x + 4, \\ 6x - 5 \leqslant 13 - x. \end{cases}$

214. Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $-2 \leqslant 6x - 3 \leqslant 3$; 2) $-2 \leqslant 2 - 10x \leqslant 4$?

215. При каких значениях a имеет хотя бы одно решение система неравенств:

1) $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 6, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

216. Для каждого значения a решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x < 1, \\ x \leqslant a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x > a. \end{cases}$

217. При каких значениях a наименьшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x > a \end{cases}$ является число 10?

218. При каких значениях b наибольшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ является число -5?

219. Решите неравенство:

1) $x^2 - 6x - 7 < 0$; 7) $4x^2 - 16x \leqslant 0$;
2) $x^2 + 2x - 48 \geqslant 0$; 8) $4x^2 - 49 > 0$;
3) $-x^2 + 6x - 5 > 0$; 9) $2x^2 - x + 1 > 0$;
4) $-x^2 - 4x - 3 < 0$; 10) $3x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$; 11) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \leqslant 5$;
6) $2x^2 - 3x + 1 > 0$; 12) $\dfrac{x - 1}{2} - 2x + 3 < \dfrac{x^2 + 3x}{4}$.

220. Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $20 + 8x - x^2 > 0$; 2) $4x^2 - 17x + 4 \leqslant 0$?

221. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $56 - x^2 - x > 0$; 2) $2x^2 - x - 15 < 0$.

222. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $1{,}5x^2 + 2x - 2 < 0$; 2) $-2x^2 - 17x - 30 \geqslant 0$.

223. При каких значениях a не имеет корней уравнение:

1) $x^2 - ax + 9 = 0$; 2) $x^2 + (a + 2)x + 25 = 0$?

224. При каких значениях b имеет два различных действительных корня уравнение:

1) $x^2 - 6bx + 8b + 1 = 0$; 2) $2x^2 + 2(b - 4)x + b = 0$?

225. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 6x^2 - 13x + 5 \geqslant 0, \\ 8 - 2x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 6x - 27 < 0, \\ 2x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

226. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 - 7|x| - 30 < 0;$ 2) $6x^2 + 5|x| - 1 \geqslant 0.$

227. Решите неравенство:

1) $(x + 8)(x - 6)(x - 12) < 0;$
2) $(2x + 5)(4x - 3)(x - 7) \geqslant 0;$
3) $(6 + x)(x + 1)(2 - x) < 0;$
4) $(x + 8{,}6)(3 - x)(4 - x) \geqslant 0;$
5) $\dfrac{x - 3}{x - 8} \geqslant 0;$
6) $\dfrac{6 - x}{x - 4} \geqslant 0;$
7) $\dfrac{(x + 9)(x + 2)}{x - 9} \geqslant 0;$
8) $\dfrac{x - 5}{(x + 6)(x - 12)} \leqslant 0.$

228. Найдите множество решений неравенства:

1) $(x^2 + 6x)(x^2 - 16) \leqslant 0;$
2) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 3x) > 0;$
3) $\dfrac{x^2 - 10x + 9}{x^2 + 4x + 3} > 0;$
4) $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 81} \leqslant 0.$

229. Решите неравенство:

1) $(x - 4)^2(x^2 - 8x + 12) < 0;$
2) $(x - 1)^2(x^2 - x - 6) \leqslant 0;$
3) $(x + 2)^2(x^2 + x - 20) \geqslant 0;$
4) $(x + 5)^2(x^2 + 2x - 3) > 0;$
5) $(x - 5)^2(x^2 - x - 6) \geqslant 0;$
6) $(x - 6)^2(x^2 - 2x - 15) \leqslant 0;$
7) $(x - 2)^2(x - 3)^4(x - 4)^3 \geqslant 0;$
8) $(x - 2)^2(x - 3)^3(x - 4)^4(x - 5)^5 \leqslant 0;$
9) $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 4x + 4} < 0;$
10) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x - 10} \geqslant 0.$

230. Решите неравенство:

1) $\dfrac{1}{x + 3} < \dfrac{2}{x - 4};$
2) $\dfrac{x + 1}{x} - \dfrac{x - 1}{x + 1} < 2;$
3) $\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2} \geqslant \dfrac{3}{x};$
4) $\dfrac{7}{x^2 - 9} - \dfrac{12}{x^2 - 4} \geqslant 0.$

Степени и корни

231. Чему равно значение выражения:

1) $5^{-2} + 5^{-1};$ 3) $0{,}08^0 + 0{,}9^0;$
2) $6^{-2} - 12^{-1};$ 4) $(4 \cdot 2^{-3} - 10^{-1})^{-1}$?

232. Расположите в порядке возрастания:

1) $11^{-2}, 11^2, 11^{-1}, 11^0;$ 2) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^2, \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-3}, \left(\dfrac{1}{7}\right)^0, \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}.$

233. Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-3} + a^{-4}$;
3) $(a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a - b)^{-2}$;
2) $mn^{-5} + m^{-5}n$;
4) $(x^{-4} + y^{-4}) \cdot (x^4 + y^4)^{-1}$.

234. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{3^{12} \cdot 27^3}{9^9}$;
4) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$;
7) $\dfrac{6^{-14}}{81^{-3} \cdot 16^{-4}}$;

2) $\left(5\dfrac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\dfrac{3}{16}\right)^7$;
5) $(0{,}2^{-3})^{-2} : 25^{-4}$;
8) $\dfrac{14^5 \cdot 2^{-6}}{28^{-2} \cdot 7^6}$.

3) $100^{-2} : 1000^{-6} \cdot 0{,}01^8$;
6) $\dfrac{(-36)^{-3} \cdot 6^7}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

235. Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\dfrac{a^{-2} - 5}{a^{-4} + 6a^{-2} + 9} : \dfrac{a^{-4} - 25}{4a^{-2} + 12} + \dfrac{2}{a^{-2} + 5}$;

2) $\left(b^{-1} - \dfrac{8b^{-1} - 36}{b^{-1} - 4}\right) \cdot \left(2b^{-1} - \dfrac{4b^{-1}}{b^{-1} - 4}\right)^{-1}$.

236. Найдите значение выражения:

1) $-3\sqrt{0{,}16} + 0{,}8$;
5) $0{,}2\sqrt[3]{1000} - \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{81}$;

2) $\dfrac{1}{9} \cdot \left(\sqrt{18}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{28}\right)^2$;
6) $\sqrt[7]{-128} + 3\left(\sqrt[9]{9}\right)^9 - 4\sqrt[3]{216}$;

3) $50 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\sqrt{3}\right)^2$;
7) $5\left(-\sqrt[6]{6}\right)^6 - 0{,}4\sqrt[4]{10000} + \left(\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{54}\right)^3$;

4) $\left(3\sqrt{8}\right)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2$;
8) $\sqrt[4]{7\dfrac{58}{81}} \cdot \sqrt[3]{-\dfrac{27}{125}} + \left(-2\sqrt{13}\right)^2 - \left(-\sqrt[7]{11}\right)^7$.

237. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{3 - a}$;
3) $\sqrt{a^4 + 1}$;
5) $\sqrt[9]{a - 8}$;
7) $\sqrt[4]{y^2 + y}$;

2) $\sqrt{a^2}$;
4) $\sqrt[8]{x + 4}$;
6) $\sqrt[6]{-x^2}$;
8) $\sqrt[10]{x^2 - 2x - 8}$?

238. Решите уравнение:

1) $x^2 = 7$;
3) $x^7 = 9$;
5) $x^4 = 16$;

2) $x^2 = -16$;
4) $x^5 = -2$;
6) $x^6 = 5$.

239. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{0{,}4}$;
5) $\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[6]{2}$;

2) $\dfrac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}}$;
6) $\sqrt[9]{2^7 \cdot 7^4} \cdot \sqrt[9]{7^5 \cdot 2^{20}}$;

3) $\sqrt{\sqrt{29} - 5} \cdot \sqrt{\sqrt{29} + 5}$;
7) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250}}$;

4) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$;
8) $\sqrt[5]{\sqrt{17} - 7} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{17} + 7}$.

240. Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{m}}$; 3) $\sqrt[9]{\sqrt[5]{x}}$; 5) $\sqrt[6]{a^3b^9}$.

2) $\sqrt{\sqrt[4]{a}}$; 4) $\sqrt[15]{b^{10}}$;

241. Упростите выражение:

1) $\sqrt{9x^8y^{10}}$, если $y \geqslant 0$;

2) $\sqrt{0{,}64x^6y^2}$, если $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$;

3) $\sqrt[7]{k^7}$;

4) $\sqrt[3]{0{,}008p^{24}n^{30}}$;

5) $\sqrt[4]{625x^{20}y^{12}z^{16}}$, если $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$;

6) $2{,}5x^2\,\sqrt[4]{256x^{28}}$, если $x \geqslant 0$.

242. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-12)^2}$, если $a \geqslant 12$; 4) $\sqrt[8]{(b-1)^8}$, если $b \geqslant 1$;

2) $\sqrt{(y+3)^2}$, если $y \leqslant -3$; 5) $\sqrt[12]{(7-y)^{12}}$, если $y \leqslant 7$;

3) $(3-a)\sqrt{\dfrac{36}{(a-3)^2}}$, если $a > 3$; 6) $(5-b)\sqrt[6]{\dfrac{64}{(b-5)^6}}$, если $b > 5$.

243. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$; 5) $\sqrt[4]{(\sqrt{5}-6)^4}$;

2) $\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}$; 6) $\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{10})^2}$; 7) $\sqrt{(\sqrt{23}-7)^2}-\sqrt{(\sqrt{23}-3)^2}$;

4) $\sqrt[8]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^8}$; 8) $\sqrt[6]{(5-4\sqrt{2})^6}+\sqrt[5]{(5-4\sqrt{2})^5}$.

244. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x^2}+x-1$, если $x \leqslant 0$; 3) $y = \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^4$;

2) $y = \sqrt{x^2}+2$; 4) $y = \sqrt[4]{(x+1)^4}$.

245. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{18a^8}$; 3) $\sqrt[3]{-m^{10}}$; 5) $\sqrt[4]{-81a^{11}}$;

2) $\sqrt[4]{x^9}$; 4) $\sqrt[6]{a^{10}b^9}$, если $a \leqslant 0$; 6) $\sqrt[10]{-p^{31}q^{24}}$.

246. Упростите выражение (переменные принимают неотрицательные значения):

1) $\sqrt[4]{b\sqrt[5]{b^4}}$; 2) $\sqrt[3]{c\sqrt[7]{c^2}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}$.

247. Упростите выражение:

1) $\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{405}$;

2) $(3\sqrt{6}-5\sqrt{8}+7\sqrt{32})\sqrt{2}-\sqrt{108}$;

3) $(\sqrt{99}-\sqrt{44})\sqrt{11}$;

4) $(5-\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$;

5) $(\sqrt{14}-\sqrt{11})(\sqrt{14}+\sqrt{11})$;

6) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})^2$.

248. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$;

3) $\dfrac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$;

5) $\dfrac{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}{m+n}$;

7) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[6]{x}-2}$;

2) $\dfrac{a-3\sqrt{a}}{a-9}$;

4) $\dfrac{\sqrt{21}+3}{7+\sqrt{21}}$;

6) $\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

8) $\dfrac{a+\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}$.

249. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{28}{\sqrt{7}}$;

3) $\dfrac{12}{\sqrt[4]{27}}$;

5) $\dfrac{32}{\sqrt[5]{16}}$;

2) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$;

4) $\dfrac{30}{\sqrt[3]{10}}$;

6) $\dfrac{a^4}{\sqrt[7]{a^4}}$.

250. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{21}{\sqrt{26}-\sqrt{5}}$;

2) $\dfrac{14}{5+\sqrt{18}}$;

3) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{3}-1}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$.

251. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{3}{12+5\sqrt{6}}+\dfrac{3}{12-5\sqrt{6}}$;

3) $\sqrt[3]{5-\sqrt{15}}\cdot\sqrt[6]{40+10\sqrt{15}}$;

2) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$;

4) $\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$.

252. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-5}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}\right)\cdot\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$;

2) $\dfrac{\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{ab}+b}$;

4) $\dfrac{a-49}{\sqrt{a}+2}\cdot\dfrac{1}{a+7\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}+7}{a-2\sqrt{a}}$.

253. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$;

2) $\dfrac{12}{5-\sqrt{13}}+\dfrac{4}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}-\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{13}+3}+\ldots+\dfrac{1}{5+\sqrt{21}}$.

254. Сравните:

1) $\sqrt{39}$ и $2\sqrt{10}$; 4) $3\sqrt[3]{3}$ и $2\sqrt[3]{10}$; 7) $\sqrt[6]{7}$ и $\sqrt[4]{3}$;

2) $0,3\sqrt{3\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{0,4}$; 5) $\sqrt[4]{6}$ и $\sqrt[8]{35}$; 8) $\sqrt[8]{4\sqrt{5}}$ и $\sqrt[4]{3}$;

3) 4 и $\sqrt[3]{65}$; 6) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{12}$; 9) $\sqrt{2\sqrt[5]{3}}$ и $\sqrt[5]{6\sqrt{3}}$.

255. Какому из данных промежутков принадлежит число $\sqrt[4]{63}$:

1) [1; 2]; 2) [2; 3]; 3) [3; 4]; 4) [4; 5]?

256. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{a^2}$, если $0 \leqslant a \leqslant 1$;

2) $\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{a^2}$, если $a < -1$.

257. Какое из данных неравенств выполняется при всех действительных значениях переменной:

1) $(\sqrt[4]{x})^4 \geqslant 0$; 2) $\sqrt[4]{x} \geqslant 0$; 3) $\sqrt[4]{x^4} \geqslant 0$?

258. Известно, что $\sqrt{6+a}+\sqrt{7-a}=5$. Найдите значение выражения $\sqrt{(6+a)(7-a)}$.

259. Известно, что $\sqrt{24-a}-\sqrt{10-a}=2$. Найдите значение выражения $\sqrt{24-a}+\sqrt{10-a}$.

260. Найдите значение выражения:

1) $5^{3,6}\cdot 5^{-1,2}\cdot 5^{1,6}$; 4) $81^{-2,25}\cdot 9^{3,5}\cdot 27^{\frac{2}{3}}$;

2) $(3^{-0,8})^7 : 3^{-2,6}$; 5) $\left(\dfrac{7^{-\frac{1}{3}}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}}{35^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{4}{3}}}\right)^{-1,5}$;

3) $\left(7^{-\frac{4}{11}}\right)^{\frac{11}{20}}\cdot 49^{1,1}$; 6) $\left(\dfrac{25^{\frac{4}{3}}\cdot 216^{\frac{1}{9}}}{5^{-\frac{1}{3}}\cdot 36^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{150^{-\frac{5}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

261. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x-8x^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{4}{7}}-8}$; 4) $\dfrac{m^{1,5}-n^{1,5}}{m+m^{0,5}n^{0,5}+n}$; 7) $\dfrac{x^{\frac{5}{8}}+6x^{\frac{1}{4}}}{x-36x^{\frac{1}{4}}}$;

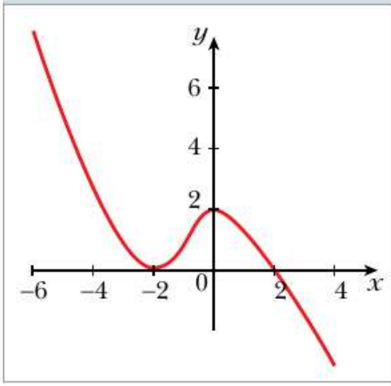
2) $\dfrac{5y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{2}{3}}}$; 5) $\dfrac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}{ab^{0,5}-a^{0,5}b}$; 8) $\dfrac{26^{\frac{1}{5}}+2^{\frac{1}{5}}}{52^{\frac{1}{5}}+4^{\frac{1}{5}}}$.

3) $\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a-b}$; 6) $\dfrac{8a+1}{4a^{\frac{2}{3}}-1}$;

Иррациональные уравнения

262. На рисунке 5 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-6; 4]$. Какому из данных промежутков принадлежит корень уравнения $\sqrt{f(x)} = 2$:
1) $[2; 4]$;
2) $[0; 2]$;
3) $[-2; 0]$;
4) $[-4; -2]$;
5) $[-6; -4]$?

Рис. 5



263. Сколько корней имеет уравнение:

1) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3} = 0$;

2) $(x-5)\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{(x+2)(x+1)} = 0$;

3) $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[4]{6-x} = 0$?

264. Найдите произведение корней уравнения

$(x^2 - 7x + 10) \cdot |3 - x| \cdot \sqrt{4-x} = 0$.

265. Решите уравнение $\sqrt[4]{x-4} + 2\sqrt{4-x} = x^2 - 5x + 4$.

266. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3x-2} = \sqrt{4x+3}$;

2) $\sqrt{3x-3} = \sqrt{4x^2 - 6x - 1}$;

3) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-4} = 2$;

4) $\sqrt{x+7} = x + 5$;

5) $\sqrt{x^2 + 2x - 12} = \sqrt{3x}$;

6) $\sqrt{x^2 + x - 4} = \sqrt{-2x}$;

7) $\sqrt{x+5} - \sqrt{8-x} = 1$;

8) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} = 1$;

9) $\sqrt{3x-6} + \sqrt{x-4} = 4$;

10) $2\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} = 1$.

267. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = 3$.

268. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$;

2) $2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 3 = 0$;

3) $\sqrt[3]{4 - 4x + x^2} - \sqrt[3]{2-x} - 2 = 0$;

4) $x^2 - 16x - \sqrt{x^2 - 16x + 8} = 12$;

5) $\sqrt{\dfrac{3x}{x-1}} - 2\sqrt{\dfrac{x-1}{3x}} = 1$;

6) $\sqrt{3x^2 - 6x + 7} = 7 + 2x - x^2$.

269. Найдите целые корни уравнения $\sqrt{2-x} + \sqrt[6]{x+3} = 3$.

270. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2}$;

3) $f(x) = \dfrac{7x+14}{x^2-7x}$;

4) $f(x) = \dfrac{x}{|x|-1}$;

5) $f(x) = \sqrt[6]{x+6} + \sqrt[8]{4-x}$;

6) $f(x) = \sqrt{x-7} + \dfrac{x+2}{x-8}$;

7) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;

8) $f(x) = \sqrt{x-4} + \dfrac{6}{\sqrt{2-x}}$;

9) $f(x) = \sqrt{x^2+4x-21} - \dfrac{6}{x^2-49}$;

10) $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{x-3}{x+4}}$;

11) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x+3)(x-2)}{x}}$;

12) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-5x+4}}$.

271. У какой из данных функций область определения равна её области значений:

1) $y = \sqrt{|x|}$; 2) $y = -\sqrt{x}$; 3) $y = \sqrt{-x}$; 4) $y = -\sqrt{-x}$?

272. Найдите область значений функции:

1) $y = \sqrt{x^2+16} - 9$;

2) $y = 4 + |x|$;

3) $y = \sqrt{-x^2}$;

4) $y = -x^2 + 8x - 16$;

5) $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + 2x$;

6) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

273. На рисунке 6 изображена точка, через которую проходит график функции $y = f(x)$. Среди данных функций укажите эту функцию:

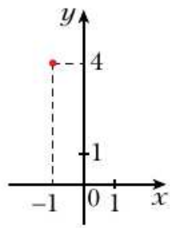
1) $f(x) = x^{-4}$;

2) $f(x) = \dfrac{4}{x}$;

3) $f(x) = \sqrt{17+x}$;

4) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.

Рис. 6



274. Постройте график данной функции и, пользуясь им, укажите промежутки знакопостоянства функции, её промежутки возрастания и промежутки убывания:

1) $y = 2 - x^2$;

2) $y = (x+4)^2$;

3) $y = 8 - 2x - x^2$;

4) $y = x^2 - 2x + 3$;

5) $y = \dfrac{4}{x} + 1$;

6) $y = \dfrac{4}{x-2}$;

2) $f(x) = x^2 + 4x$ убывает на промежутке $(-\infty; -2]$.

281. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = x - 3$ и $y = x^2 - 4x + 3$;
4) $y = \dfrac{6}{x}$ и $y = x + 5$;
2) $y = 2x^2 - 3x$ и $y = -x^2 + x + 7$;
5) $y = \sqrt{10 - 3x}$ и $y = -x$;
3) $y = x^6$ и $y = 2x^4$;
6) $y = \sqrt{x + 2}$ и $y = \sqrt{2x - 3} + 1$.

282. Задайте формулой прямую пропорциональность, если известно, что её график проходит через точку $M(3; -7)$.

283. Найдите значение b, если известно, что график функции $y = -\dfrac{1}{6}x + b$ проходит через точку $M(12; 5)$.

284. Найдите значение k, если известно, что график функции $y = kx - 10$ проходит через точку $M(-4; 2)$.

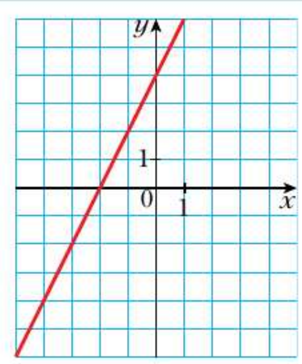
285. График функции $y = kx + b$ пересекает оси координат в точках $A(0; -3)$ и $B(1; 0)$. Найдите значения k и b.

286. Все точки графика функции $y = kx + b$ имеют одинаковую ординату, равную -5. Найдите значения k и b.

287. График функции $y = kx + b$ параллелен оси абсцисс и проходит через точку $A(7; -5)$. Найдите значения k и b.

288. Задайте формулой линейную функцию, график которой изображён на рисунке 8.

Рис. 8



289. Найдите значение k, при котором график функции $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку:

1) $A(-5; 8)$; 2) $B\left(\dfrac{1}{3}; -6\right)$.

290. При каких значениях p и q график функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $A(-1; 4)$ и $B(-2; 3)$?

291. График квадратичной функции — парабола с вершиной в начале координат, проходящая через точку $(-4; 12)$. Задайте эту функцию формулой.

292. График квадратичной функции — парабола с вершиной в точке $A(0; 3)$, проходящая через точку $B(2; -29)$. Задайте эту функцию формулой.

293. При каких значениях p и q вершина параболы $y = x^2 + px + q$ находится в точке $(3; 4)$?

294. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ имеет вершину в точке $M(1; -1)$ и проходит через точку $K(-2; 3)$. Найдите значения коэффициентов a, b и c.

295. Найдите наименьшее значение функции $y = 1{,}5x^2 - 6x + 1$ на промежутке:

1) $[-4; 1]$; 2) $[-3; 1]$; 3) $[4; 6]$.

296. При каком значении c наибольшее значение функции $y = -4x^2 + 8x + c$ равно -6?

297. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^6$ на промежутке:

1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-2; 2]$.

298. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-3}$ на промежутке:

1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[-2; -1]$.

299. Даны функции $f(x) = x - 3$, $g(x) = (\sqrt{x-3})^2$ и $h(x) = \sqrt{(x-3)^2}$. Графики каких из этих функций совпадают?

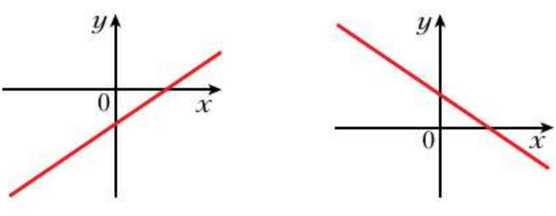
300. На рисунке 9 изображён график линейной функции $y = ax + b$. Укажите верное утверждение:

1) $k > 0$, $b > 0$; 3) $k < 0$, $b > 0$;
2) $k > 0$, $b < 0$; 4) $k < 0$, $b < 0$.

301. На рисунке 10 изображён график функции $y = a\sqrt{x+b}$. Укажите верное утверждение:

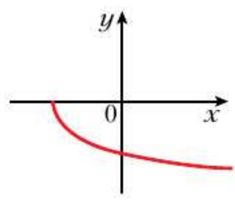
1) $a > 0$, $b > 0$; 3) $a < 0$, $b > 0$;
2) $a > 0$, $b < 0$; 4) $a < 0$, $b < 0$.

Рис. 9



а б

Рис. 10

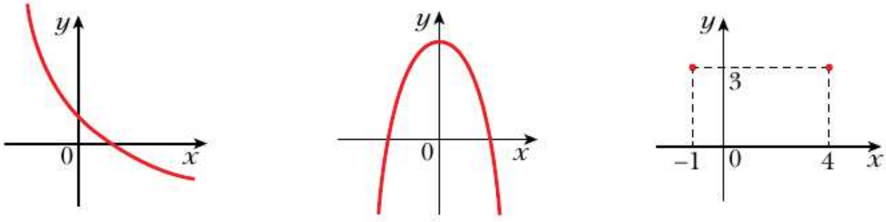


302. Вершина параболы $y = (x + a)^2 + b$ лежит в третьей координатной четверти. Укажите верное утверждение:

1) $a > 0$, $b > 0$; 3) $a < 0$, $b > 0$;
2) $a > 0$, $b < 0$; 4) $a < 0$, $b < 0$.

303. Какой из графиков, изображённых на рисунке 11, является графиком обратимой функции?

Рис. 11



а *б* *в*

304. Является ли обратимой функция:

1) $y = \sqrt[3]{x}$;
2) $y = x^4,\ x \in [1; +\infty)$;
3) $y = x^4,\ x \in [-2; 0]$;
4) $y = x^4,\ x \in [-2; +\infty)$?

305. Найдите функцию, обратную данной:

1) $y = 3x + 5$;
2) $y = \dfrac{4}{x-1}$;
3) $y = 2 + \sqrt{x-3}$;
4) $y = x^2,\ \ x \in [2; +\infty)$.

306. Функция g является обратной функции $f(x) = x^2 - 17,\ x \in (-\infty; 0)$. Найдите $g(19)$.

Прогрессии

307. Найдите разность арифметической прогрессии (x_n), если:
1) $x_1 = 17,\ x_9 = -7$;
2) $x_5 = -3,\ x_{14} = 42$.

308. Найдите первый член арифметической прогрессии (y_n), если:
1) $y_{10} = -19,\ d = -2$;
2) $y_5 = 13,\ y_{16} = 46$.

309. Найдите номер члена арифметической прогрессии (z_n), равного 3,2, если $z_1 = 9{,}2$ и $d = -0{,}6$.

310. Является ли число 24 членом арифметической прогрессии (b_n), если $b_1 = 8$ и $d = 3$? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

311. Дана арифметическая прогрессия 4,9; 4,5; 4,1; ... . Начиная с какого номера её члены будут отрицательными?

312. Найдите количество отрицательных членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -30,\ \ d = 1{,}2$.

313. При каком значении m значения выражений $3m - 1$, $m^2 + 1$ и $m + 3$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

314. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = 0{,}2n + 5$. Найдите сумму двадцати шести первых членов прогрессии.

315. Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 6$, $a_{14} = 45$; 2) $a_6 = 34$, $a_{14} = -54$.

316. Найдите сумму пятнадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{15} = 71$, $d = 6{,}5$.

317. При любом n сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 3n^2 - 4n$. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

318. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 11, которые не больше 341.

319. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 9, которые не больше 156.

320. Сумма шестого и двадцать пятого членов арифметической прогрессии равна 14. Найдите сумму первых тридцати членов этой прогрессии.

321. Найдите сумму первых тридцати пяти членов арифметической прогрессии, если её восемнадцатый член равен 8.

322. Вычислите сумму первых пятнадцати чётных натуральных чисел.

323. Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных числу 8.

324. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 108$, $b_4 = 32$; 2) $b_2 = 6$, $b_4 = 30$.

325. Найдите первый член геометрической прогрессии (c_n), если $c_4 = 40$, $c_7 = -320$.

326. Число 192 является членом геометрической прогрессии $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, 3, ... Найдите номер этого члена.

327. Какие три числа надо вставить между числами 48 и 243, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

328. При каком значении x значения выражений $2x - 1$; $x + 1$ и $5 - x$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

329. Найдите сумму четырёх первых членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_4 = 280$, $q = 5$; 2) $b_1 = \sqrt{2}$, $b_5 = 4\sqrt{2}$, $q < 0$.

330. Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой равна 72, а знаменатель равен $\frac{3}{8}$.

331. Найдите пятый член бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен -12, а сумма равна -8.

332. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 108,\ b_4 = 48$.

333. Произведение трёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, равно –64. Найдите второй член этой прогрессии.

Тригонометрические функции

334. При каких значениях a возможно равенство:

1) $\cos x = a - 2$; 2) $\sin x = 2a - a^2 - 2$?

335. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $6 + \sin^2\alpha$; 3) $\dfrac{\sin\alpha(5 + \cos\alpha)}{\sin\alpha}$.

336. Сравните:

1) $\operatorname{tg} 140^\circ$ и $\operatorname{tg}(-140^\circ)$; 3) $\operatorname{ctg}\dfrac{6\pi}{5}$ и $\cos\dfrac{5\pi}{7}$;

2) $\cos 50^\circ$ и $\sin 350^\circ$; 4) $\cos 5$ и $\sin 4$.

337. Является ли чётной либо нечётной функция, заданная формулой:

1) $f(x) = 2x + \sin x$; 4) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^3 - 1}$;

2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{x^2 - 1}$; 5) $f(x) = \operatorname{tg} x + x^2$;

3) $f(x) = \dfrac{x^4 \cos x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$; 6) $f(x) = \dfrac{(2 - x)\cos x}{2 - x}$?

338. Постройте график функции:

1) $y = \sin x + 1$; 3) $y = 1{,}5\sin x$; 5) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$;

2) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; 4) $y = \cos\dfrac{x}{3}$; 6) $y = -\dfrac{1}{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$.

339. Постройте график функции:

1) $y = (\sqrt{\cos 2x})^2$; 3) $y = \sqrt{\sin^2 x} - \sin x$;

2) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}|x|$; 4) $y = \dfrac{\operatorname{ctg}|x|}{\operatorname{ctg} x}$.

340. Вычислите значения тригонометрических функций аргумента α, если:

1) $\cos\alpha = -\dfrac{2}{7}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

341. Упростите выражение:

1) $\operatorname{ctg} x - \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$; 3) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} + \dfrac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$.

342. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $3\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$; 2) $3\sin^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

343. Упростите выражение:

1) $\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, если $\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

344. Докажите тождество:

1) $\frac{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)} = \operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+2\sin\beta\cos\alpha} = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$;

3) $\sin 12\alpha\operatorname{ctg}6\alpha - \cos 12\alpha = 1$;

4) $1 - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

345. Найдите наибольшее значение выражения:

1) $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$; 2) $4\sin\alpha - 3\cos\alpha$.

346. Упростите выражение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - \sin(\pi+\alpha) + \operatorname{tg}(2\pi-\alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi-\alpha) + \cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\sin(2\pi-\alpha)$;

3) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)}{\sin(270^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)\cos(90^\circ+\alpha)}$;

4) $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\sin(2\pi-\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)\right)^2 - \frac{2\cos^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)}$.

347. Упростите выражение:

1) $\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha}$; 4) $\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+2\alpha\right)}$.

348. Дано: $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = 0{,}4$. Найдите $\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{x}{2}\right)$.

349. Докажите тождество:

1) $\operatorname{tg}2\alpha(1+\cos 4\alpha) - \sin 4\alpha = 0$; 2) $\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

350. Докажите, что $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

351. Докажите тождество:

1) $\sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin 7\alpha - \sin 5\alpha = 4\sin\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$;

2) $\dfrac{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

352. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos 5\alpha}\right) \cdot \dfrac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha - 1}$;

2) $\dfrac{1 - \cos(2\alpha - \pi) + \cos(4\alpha + 2\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + 1 - 2\sin^2(2\pi - 2\alpha)}$;

3) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

353. Докажите тождество:

1) $\sin 2\alpha + 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} + \alpha\right) = -1$;

2) $\sin 8\alpha \sin 4\alpha + \cos 7\alpha \cos 5\alpha = \cos 3\alpha \cos\alpha$.

354. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\cos\left(2\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$;

3) $\sin\left(2\operatorname{arctg} 1 - \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

355. Найдите область определения функции:

1) $y = \arcsin(x - 5)$;

2) $y = \arccos(x^2 - 3)$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{6 - x}$.

356. Найдите область значений функции:

1) $y = 2\arcsin x - \dfrac{\pi}{4}$;

2) $y = 5 - 3\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$.

Тригонометрические уравнения и неравенства

357. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

358. Сколько корней уравнения $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$ принадлежат промежутку $[0; \pi]$?

359. Найдите все корни уравнения $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\frac{\pi}{3}<x<\pi$.

360. Решите уравнение:

1) $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$;
2) $\sin^2 3x+3\cos 3x=3$;
3) $\cos 2x-3\sin x=2$;
4) $2\operatorname{tg}\frac{x}{3}+2\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=5$.

361. Решите уравнение:

1) $3\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$;
2) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x=0$;
3) $4\sin^2 x+\sin 2x=3$;
4) $\sin x-4\cos x=1$.

362. Решите уравнение:

1) $\cos 4x+\cos 6x=0$;
2) $\sin 8x=2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)$;
3) $\cos x+\cos 7x=\cos 3x+\cos 5x$;
4) $\sin 3x-2\sin x=0$.

363. Решите уравнение:

1) $\cos^2 x+\sin^2 3x=1$;
2) $\sin^2 x+\sin^2 2x-\cos^2 3x=0{,}5$.

364. Решите уравнение:

1) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$;
2) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin 2x$.

365. Решите уравнение:

1) $\sin(60^\circ+x)\cos(x-30^\circ)=1$;
2) $\cos 6x\cos x=\cos 5x$;
3) $\sin 6x\cos 4x=\sin 10x\cos 8x$;
4) $4\sin^2 2x=3-2\sin 6x\sin 2x$.

366. Решите уравнение:

1) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0$;
2) $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=0$;
3) $\frac{\sin 2x}{1-\sin x}=2\cos x$;
4) $\frac{1+\cos x-\sin x}{\cos x}=0$.

367. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin^2 x-0{,}5\sin 2x=1$.

368. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^3 x\cos x=0{,}25-\cos^3 x\sin x$.

369. Сколько корней уравнения $\sin 3x-\sin x+\cos 2x=0$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$?

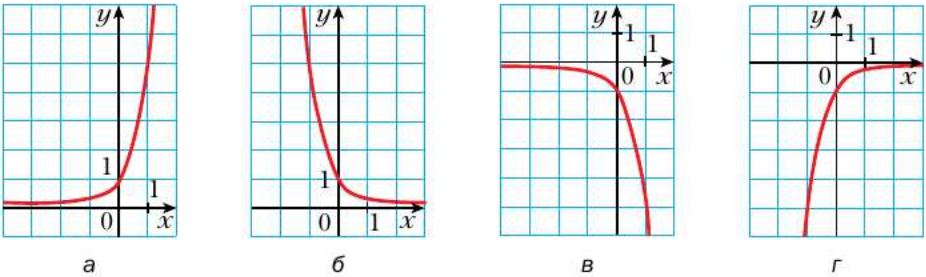
370. Решите неравенство:

1) $\sin 3x>\frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\cos\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$;
3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant-\frac{1}{2}$;
5) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\geqslant-1$.

Показательная функция. Показательные уравнения и неравенства

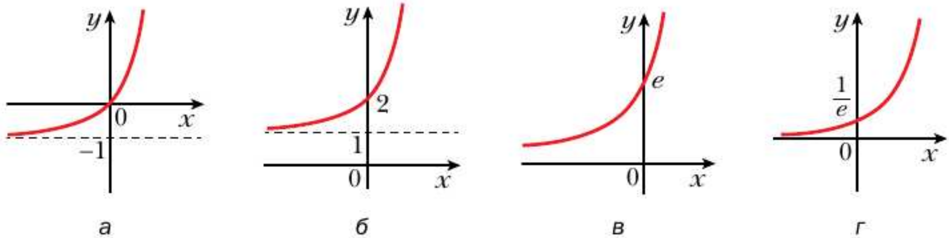
371. На одном из рисунков 12, *а–г* изображён график функции $y = 0{,}2^{-x}$. Укажите этот рисунок.

Рис. 12



372. На одном из рисунков 13, *а–г* изображён график функции $y = e^x - 1$. Укажите этот рисунок.

Рис. 13



373. Какова область значений функции $f(x) = 9^x + 2$?

374. Известно, что $0{,}7^m > 0{,}7^n$. Сравните числа m и n.

375. Какая из данных функций не является возрастающей:

1) $y = e^x$; 2) $y = \pi^x$; 3) $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$?

376. Решите уравнение:

1) $8^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$;

2) $(0{,}75)^{x+1} = \frac{16}{9}$;

3) $\sqrt{125^{x-1}} = \sqrt[3]{25^{2-x}}$;

4) $\left(\frac{6}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^x = \frac{125}{216}$;

5) $2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x = 90^{3x-7}$;

6) $8 \cdot 7^{2x^2-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} = 0$.

377. Найдите множество решений неравенства:

1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > 9^{2x-1}$;
2) $1 < 10^{x+1} \leqslant 100\,000$;
3) $0{,}04 \leqslant 5^{2-x} \leqslant 25$;
4) $1{,}3^{x^2-4x+2} \leqslant 1{,}69$;
5) $0{,}4^{x^2+2x+2} \leqslant 0{,}16$;
6) $4{,}5^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}} \geqslant 1$;
7) $0{,}9^{\frac{6-x}{x^2-2x-3}} \leqslant 1$;
8) $7 \cdot 343^{\frac{2x^2+1}{x}} - 49^{3x} < 0$.

378. Решите уравнение:

1) $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 7$;
2) $2^{x+1} + 2^{x-3} = 68$;
3) $7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6$;
4) $4^{\frac{x}{2}} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 262$;
5) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 3^{x-1} - 3^{x-2} + 3^{x-3}$;
6) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} = 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

379. Решите неравенство:

1) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} > 13$;
2) $5^{x+1} + 5^{x-2} < 630$;
3) $0{,}5^{x+3} - 0{,}5^{x+2} + 0{,}5^{x+1} < 0{,}375$;
4) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} > 17$;
5) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 64^{\frac{x}{3}} \leqslant 228$;
6) $6 \cdot 0{,}5^{x+2} + 0{,}5^{x-3} \geqslant 19$.

380. Решите уравнение:

1) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$;
2) $9^x + 3^x - 6 = 0$;
3) $49^x + 2 \cdot 7^x - 35 = 0$;
4) $\frac{16 - 3^{2x}}{3^x + 4} = 1$;
5) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$;
6) $9 - 2^x = 2^{3-x}$;
7) $2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7$;
8) $(0{,}2)^{2x-2} - 126 \cdot (0{,}2)^x + 5 = 0$;
9) $3^{1+\sqrt{x+1}} = 28 - 3^{2-\sqrt{x+1}}$;
10) $\frac{5}{3^{x-1}} - \frac{2}{3^x - 1} = 4$.

381. Решите неравенство:

1) $25^x - 2 \cdot 5^x - 15 > 0$;
2) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$;
3) $3^{x+2} - 28 \cdot 3^{0,5x} + 3 \geqslant 0$;
4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \leqslant 0$;
5) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 2^{1-x} - 8 \geqslant 0$;
6) $7^x + 7^{2-x} - 50 \geqslant 0$.

382. Решите уравнение:

1) $3^x - 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}} - 50 \cdot 2^x = 0$;
2) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$;
3) $5^{2x+1} - 3 \cdot 10^x = 2^{2x+1}$;
4) $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$.

Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства

383. Вычислите:

1) $2^{1-\log_2 7}$;

2) $5^{3\log_5 2}$;

3) $10^{1+\lg\sin\frac{\pi}{6}}$;

4) $4^{\frac{1}{2}\log_2 3+\log_2 5}$;

5) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5}$;

6) $\lg 20 + \lg 50$;

7) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}$;

8) $5^{-2\log_{25}\frac{1}{4}+\log_5 2}$;

9) $36^{\log_6 7} + 10^{2-\lg 4} - 7^{\log_{49} 25}$;

10) $3\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 64$;

11) $\frac{\lg 27 + \lg 12}{\lg 2 + 2\lg 3}$;

12) $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$.

384. Областью определения какой из данных функций является множество действительных чисел:

1) $y = \lg(x+1)$;

2) $y = \lg(x^2-1)$;

3) $y = \lg(x^2+1)$;

4) $y = \lg x^2$?

385. Найдите область определения функции:

1) $y = \ln\frac{x+1}{4-5x}$;

2) $y = \log_6(4^x - 3\cdot 2^x + 2)$;

3) $y = \lg\lg x$;

4) $y = \frac{x-2}{\log_2(x^2-8)}$;

5) $y = \lg(5x-x^2) + \frac{1}{\lg(2-x)}$;

6) $y = \log_{x-2}(x^2+x-3)$.

386. На рисунке 14 изображён график убывающей функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = \log_4 x$?

387. На одном из рисунков 15, *а–г* изображён график функции $y = -\log_3 x$. Укажите этот рисунок.

388. На одном из рисунков 16, *а–г* изображён график функции $y = \log_{0,1}(-x)$. Укажите этот рисунок.

389. Постройте график функции:

1) $y = 5^{\log_5(x-1)}$;

2) $y = 2^{-\log_2 x}$;

3) $y = 10^{\lg\sin x}$;

4) $y = e^{\ln(4-x^2)}$;

5) $y = \sqrt{\ln\sin x}$;

6) $y = \sqrt{\log_5^2 x}\cdot\log_x 5$.

Рис. 14

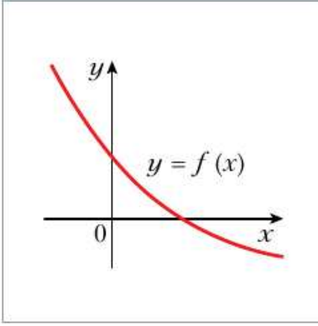


Рис. 15

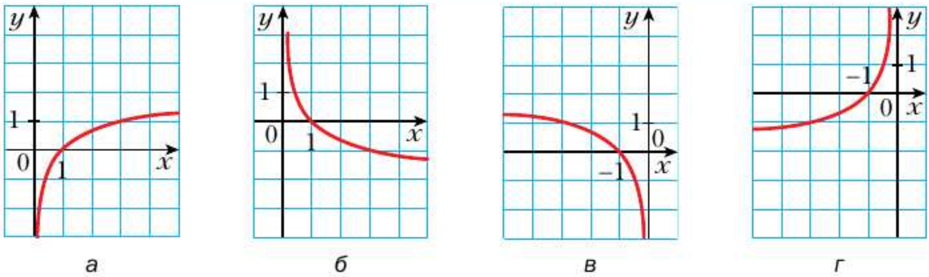
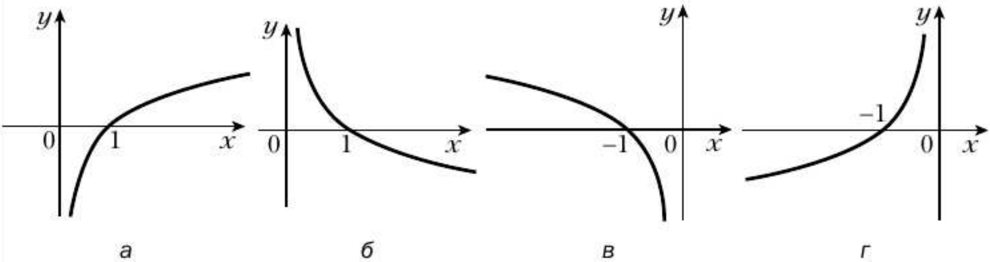


Рис. 16



390. Сравните числа m и n, если:

1) $\log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n$; 2) $\log_{1,5} m < \log_{1,5} n$.

391. Сравните с единицей основание логарифма, если:

1) $\log_a 7 < \log_a 6$; 2) $\log_a 5 > 0$.

392. Сравните с нулём число:

1) $\log_2 \dfrac{1}{5}$; 2) $\log_3 4$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 0,6$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 10$.

393. Между какими двумя последовательными целыми числами расположено на координатной прямой число:

1) $\lg 50$; 2) $\log_3 8$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} 30$; 4) $\log_{0,1} 4,37$?

394. Решите уравнение:

1) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) = -1$;

2) $\lg x = 3 - \lg 20$;

3) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$;

4) $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$;

5) $100^{\lg(x+10)} = 10\,000$;

6) $\log_2(9 - 2^x) = 7^{\log_7(3-x)}$;

7) $\log_{2x} 64 - \log_{2x} 4 = 2$;

8) $\log_{x-1}(2x^2 - 4x + 1) = 2$;

9) $\dfrac{\log_2(x^2 - x - 16) - 2}{\log_5(x-4)} = 0$.

395. Найдите множество решений неравенства:

1) $\log_7(2x-1) < 2$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) > 1$;
3) $\log_4(x+1) < -\frac{1}{2}$;
4) $\lg(x^2+x+8) > 1$;
5) $\log_{0,2}(x^2+4x) \geqslant -1$;
6) $\log_5(x^2+2x-3) \leqslant 1$;
7) $\log_{0,6}(x^2+4x+4) > 0$;
8) $\log_3 \frac{2x+1}{x+1} \geqslant 1$;
9) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{x+2}{x^2} < 0$.

396. Решите уравнение:

1) $\lg(5x+2) = \frac{1}{2}\lg 36 + \lg 2$;
2) $\log_5(250-x^3) = 3\log_5 x$;
3) $\log_9(4x-6) = \log_9(2x-4)$;
4) $\frac{1}{2}\lg(3x^2+25) = \lg(3x-5)$;
5) $\lg(2x+1) = 0,5\lg(1-3x)$;
6) $\log_6(x^2-x-2) = \log_6(2x^2+x-1)$;
7) $2\log_7(-x) = \log_7(x+6)$;
8) $\ln(x^2-2x-8) = 2\ln\sqrt{-4x}$.

397. Решите неравенство:

1) $\log_6(x+1) < \log_6(2x+5)$;
2) $\log_2(2x-3) > \log_2(3x-5)$;
3) $\ln(x^2-3) > \ln(3x-7)$;
4) $\log_{0,7}(3x-1) < \log_{0,7}(3-x)$;
5) $\log_{0,4}(x^2+1) > \log_{0,4}(2x+25)$;
6) $\log_{\frac{1}{9}}(1-x^2) > \log_{\frac{1}{9}}(2x+2)$;
7) $2\log_3 x - \log_3(2x+9) \leqslant 1$;
8) $\lg\frac{x+3}{x+4} > \lg\frac{x+5}{x+2}$.

398. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{0,7}\frac{x+1}{x-5}}$;
2) $f(x) = \log_3 \log_{0,3}\frac{x-2}{x+3}$.

399. Решите уравнение:

1) $\lg(2x-1) + \lg(x+5) = \lg 13$;
2) $\log_3(2x-7) + \log_3(x-1) = 2 + \log_3 2$;
3) $\log_{0,5}(4-x) + \log_{0,5}(x-1) = -1$;
4) $\log_7(-x) + \log_7(1-x) = \log_7(x+3)$.

400. Решите неравенство:

1) $\log_2 x + \log_2(x+1) \leqslant 1$;
2) $\log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}}(x-1) \geqslant \log_{\frac{1}{6}}(x+3)$;
3) $\log_3(4-x) + \log_3(x+3) \leqslant 1 + \log_3(x-1)$;
4) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+3) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 3 - 1$.

401. Решите уравнение:

1) $3\log_3^2 x + 7\log_3 x - 6 = 0$;

2) $\ln^2 x - 4\ln x - 21 = 0$;

3) $\dfrac{2}{\lg x + 2} - \dfrac{1}{\lg x - 4} = 1$;

4) $\lg^2 x + 2\lg x - 20 = 5^{\log_5 \lg x}$;

5) $\log_3 x^2 \cdot \log_3 \dfrac{x}{9} = 6$;

6) $\log_5^2 x^3 - 5\log_5 x^2 + 1 = 0$;

7) $\log_7 \dfrac{7}{x} + \log_7^3 x = 1$;

8) $\log_9 x + \log_x 9 = 2{,}5$.

402. Решите неравенство:

1) $\lg^2 x - \lg x \geqslant 0$;

2) $\ln^2 x + \ln x \leqslant 0$;

3) $3\log_8^2 x + 2\log_8 x - 5 \geqslant 0$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}^2(-x) - \log_{\frac{1}{3}}(-x) \leqslant 2$;

5) $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} > 1$;

6) $\dfrac{\log_6^2 x + 2\log_6 x - 6}{\log_6 x} < 1$.

403. Решите уравнение:

1) $x^{\log_5 x - 2} = 125$;

2) $x^{\lg x} = 100x$;

3) $x^{2\log_7 x} = 7x$;

4) $x^{\log_6 x} = \dfrac{36}{x}$.

Производная и её применение

404. Найдите производную функции:

1) $y = x^6 + 2x^4 + \dfrac{4}{x^2} - 1$;

2) $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 1)$;

3) $y = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1}$;

4) $y = (3 - 2x)\sqrt{x}$;

5) $y = \sqrt{x}\sin x$;

6) $y = 2^x \cos x$;

7) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{6}$;

8) $y = (2x - 1)^6$;

9) $y = \log_3(2x^2 - 3x + 1)$;

10) $y = 14^{2 - 5x}$;

11) $y = x^3 + \ln(6x - 1)$;

12) $y = \dfrac{1}{2x^3} + \dfrac{4}{x}$.

405. Вычислите значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = \dfrac{3x^2}{1 - x}$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x}$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{4 - \sin x}$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = \cos 2x - \sin\dfrac{\pi}{3}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$;

6) $f(x) = e^{2x - 1}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

406. Решите неравенство $f'(x) \geqslant g'(x)$, если:

1) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{3}$, $g(x) = 3x^2 - x - \ln 2$;

2) $f(x) = x - x^3$, $g(x) = \dfrac{2}{x}$;

3) $f(x) = 2 \cdot 3^x$, $g(x) = 9^{x-1}$.

407. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 3t^2 - 12t + 18$ (время t измеряется в секундах, перемещение s — в метрах). Через сколько секунд после начала движения точка остановится?

408. Укажите среди данных функций ту функцию, касательная к которой в точке с абсциссой $x_0 = 0$ является горизонтальной прямой:

1) $y = x^3 + 2x - 3$; 3) $y = x^2 - 6x$;
2) $y = x^2 - 1$; 4) $y = -x^2 - x$.

409. Укажите среди данных функций ту функцию, касательная к которой в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$ параллельна биссектрисе первого координатного угла:

1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$.

410. Составьте уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$; 3) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{12}\right)$, $x_0 = \pi$;

2) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x_0 = -2$; 4) $f(x) = (x - 1)\sqrt{2x + 1}$, $x_0 = 4$.

411. Прямые a и b, изображённые на рисунке 17, параллельны, причём прямая a является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, а уравнение прямой b имеет вид $2x - y + 3 = 0$. Найдите $f'(x_0)$.

412. К графику функции $f(x) = 5 + 7x - 4x^2$ проведена касательная, угловой коэффициент которой равен -9. Найдите координаты точки касания.

413. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $f(x) = \dfrac{x + 4}{x - 5}$, угловой коэффициент которых равен -1.

414. Найдите координаты точки параболы $y = x^2 - 3x + 2$, касательная к которой параллельна прямой $y = 6 - x$.

415. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x$, которая параллельна прямой $y = 5x - 8$.

416. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{3x^2 - 8}$, которая параллельна прямой $y = 3x + 5$.

5) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

6) $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2-4}$;

7) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3+8}$;

8) $f(x) = (1-x)e^{-x}$;

9) $f(x) = \dfrac{x}{e} - e^x$;

10) $f(x) = x^2 - 8\ln x$;

11) $f(x) = \sqrt{x}(\ln x - 4)$;

12) $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}$.

422. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на промежутке $[-2; 0]$;

2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ на промежутке $[0; 4]$;

3) $f(x) = \cos x - \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$;

4) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$ на её области определения;

5) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ на промежутке $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$.

423. Представьте число 15 в виде суммы двух таких неотрицательных чисел, чтобы произведение квадрата первого из них на второе число было наибольшим.

424. Представьте число 20 в виде суммы двух таких неотрицательных чисел, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

425. Найдите отрицательное число, разность которого с третью его куба принимает наименьшее значение.

426. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в окружность радиуса 25 см?

427. Исследуйте функцию и постройте её график:

1) $f(x) = x^3 - 9x$;

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;

3) $f(x) = 6x^2 - 2x^3$;

4) $f(x) = (x^2 - 2)^2$;

5) $f(x) = 4 + x^2 - \dfrac{1}{4}x^4$;

6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$;

7) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

8) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2}$.

Интеграл и его применение

428. Найдите общий вид первообразных для функции:

1) $f(x) = x - \dfrac{2}{x^5}$ на промежутке $(-\infty; 0)$;

2) $f(x) = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; +\infty)$;

3) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x} + \dfrac{3}{\sin^2 3x}$ на промежутке $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}\right)$;

4) $f(x) = 2 + \dfrac{4}{x-1}$ на промежутке $(-\infty; 1)$;

5) $f(x) = e^{5x} - 7e^{-4x}$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} - \cos\dfrac{x}{4}$ на промежутке $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

429. Для функции f найдите на указанном промежутке I первообразную F, график которой проходит через данную точку M:

1) $f(x) = 2x + 4$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(2; 1)$;

2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(1; 8)$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2} - 5\sin 5x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(\pi; 0)$;

4) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-2x}}$, $I = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$, $M(-4; 1)$;

5) $f(x) = 6x^2 + e^{\frac{x}{4}}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(2;\ 4\sqrt{e})$;

6) $f(x) = (5x-3)^4$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(1; 1)$.

430. Тело движется прямолинейно со скоростью, которая в любой момент времени t определяется по закону $v(t) = t^2$. Определите закон движения тела, если за первые 3 с движения тело прошло путь 10 м.

431. Задайте формулой функцию f, график которой проходит через точку $A(4; 3)$, если угловой коэффициент касательной к графику этой функции в любой точке x из её области определения равен $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

432. Вычислите интеграл:

1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$;

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} (6\cos 4x - 3\sin x)\,dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{18}} \frac{dx}{\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}$;

4) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 4)\,dx$;

5) $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx$;

6) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$;

7) $\displaystyle\int_0^2 (3x-2)^3\,dx$;

8) $\displaystyle\int_2^4 e^{-x}\,dx$;

9) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{4x+1}$.

433. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

2) $y = 2 - x^2$, $y = 0$;

3) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

4) $y = e^{-x}$, $y = 1$, $x = -2$;

5) $y = -x^2 + 4$, $x + y = 4$;

6) $y = \dfrac{4}{x^2}$, $y = x - 1$, $x = 1$;

7) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5 - x$;

8) $y = 8 - x^2$, $y = 4$;

9) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$;

10) $y = \dfrac{5}{x}$, $y = 4x + 1$, $x = 2$.

434. Вычислите интеграл:

1) $\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2}\,dx$;

2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\,dx$.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации: необходимой литературы и интернет-ресурсов.

2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками при помощи руководителя проекта составляется окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы — 10—15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомеидуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Принцип Кавальери.

Рекомендуемая литература

Понарин Я. П. Элементарная геометрия: в 2 т. — Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.

Рабинович В. Л. Вычисление объёмов с помощью принципа Кавальери // Квант. 1976. № 6.

2. История возникновения дифференциального и интегрального исчислений.

Рекомендуемая литература

Рыбников К. А. История математики: в 2 ч. — М.: Московский ун-т, 1960.

Юшкевич А. П. Из истории возникновения математического анализа. — М.: Знание, 1985.

3. Метод Кардано для решения кубических уравнений.

Рекомендуемая литература

Клумова И., Фукс Д. Формула существует, но... // Квант. 1976. № 9.

4. Выпуклые функции и доказательство неравенств.

Рекомендуемая литература

Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965.

Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Йенсена // Квант. 2000. № 4.

Седракян Н. М., Авоян А. М. Неравенства. Методы доказательства. — М.: Физматлит, 2002.

Соловьёв Ю. П. Неравенства. — М.: МЦНМО, 2005.

Шкапенюк М. Выпуклость функций и доказательство неравенств // Квант. 1980. № 3.

5. Применение комплексных чисел в геометрии.

Рекомендуемая литература

Глазков Ю. А., Варшавский И. К., Гиашвили М. Я. Комплексные числа. — М.: Экзамен, 2012.

Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. — М.: МЦНМО, 2004.

Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. — М., 1955.

Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

6. Дифференциальные уравнения как математическая модель процессов.

Рекомендуемая литература

Арнольд В. И. Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения // Квант. 1986. № 2.

Вышенский В., Перестюк Н., Самойленко А. Поговорим о дифференциальных уравнениях // Квант. 1980. № 1.

Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих. – М.: Физматлит, 2010.

Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф. Основной принцип дифференциального исчисления // Квант. 1988. № 4.

7. А.Н. Колмогоров — выдающийся российский математик XX столетия.

Рекомендуемая литература

Колмогоров в воспоминаниях учеников: сб. ст. / ред.-сост. А. Н. Ширяев. – М. : МЦНМО, 2006.

Колмогоров в воспоминаниях / ред.-сост. А. Н. Ширяев. – М.: Изд. фирма «Физ.-мат. литература» : ВО «Наука», 1993.

Розов Н. Х., Тихомиров В. М. Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове. – М.: Фазис, 1999.

8. Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Свойства биномиальных коэффициентов.

Рекомендуемая литература

Виленкин Н. Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.

Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. – М.: Наука, 1977.

Кузьмин О. В. Обобщённые пирамиды Паскаля и их приложения. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000.

Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. – М.: МЦНМО, 2007.

Спивак А. В. Арифметика. – М.: Бюро Квантум, 2007.

Успенский В. А. Треугольник Паскаля. – М.: Наука, 1979.

9. Зависимые случайные величины

Рекомендуемая литература

Кимбл Г. Как правильно пользоваться статистикой / пер. с англ. Б. И. Клименко; предисл. Н. К. Дружинина. – М.: Финансы и статистика, 1982. – (Б-чка иностр. книг для экономистов и статистиков).

Колде Я. К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш. шк., 1991.

Ниворожкина Л. И. и др. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: руководство для решения задач. – Ростов н/Д: Феникс, 1999.

Сигел Э. Практическая бизнес-статистика / пер. с англ. – М.: ИД «Вильямс», 2002.

Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика: экспер. уч. пос. для 10 и 11 кл. общ. учр. – М.: МЦНМО, 2014.

Рекомендуемая литература

Бродский И. Л. Вероятность и статистика: 10—11 классы: планирование и практикум: пособие для учителя. — (Школьное образование).

Бродский Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. — М.: Оникс: Мир и Образование, 2008. — (Школьный курс математики).

Бунимович Е. А., Булычёв В. А. Вероятность и статистика в курсе математики общеобразовательной школы: лекции 5—8. — М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2005.

Ниворожкина Л. И. и др. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: руководство для решения задач. — Ростов н/Д: Феникс, 1999.

Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика: экспер. уч. пос. для 10 и 11 кл. общ. учр. — М.: МЦНМО, 2014.

Дружим с компьютером

В этом учебном году вы систематизируете и усовершенствуете свои знания, позволяющие использовать компьютер в ходе изучения курса математики. Определяйте самостоятельно, какую техническую работу вы можете выполнять с помощью компьютера; каким образом представлять изучаемый материал в наглядном виде, иллюстрировать его таблицами и графиками. Рекомендуем также составлять алгоритмы для решения упражнений и программы на изучаемом языке программирования для их реализации. Ниже приведены задания, соответствующие изучаемым темам.

Задания курса алгебры 11 класса для выполнения с помощью компьютера

Задания, содержащие элементы программирования, отмечены звёздочкой. В зависимости от уровня изучения информатики их можно выполнять, либо записывая алгоритм словами, либо в виде блок-схемы, либо реализовывая эти алгоритмы в виде программ на изучаемом языке программирования.

Наиболее сложные задания отмечены восклицательным знаком.

К § 1 «Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция»

1.1. Приведите примеры из физики, биологии, экономики, в которых некоторый процесс описывается показательной функцией. Смоделируйте эти процессы с помощью табличного редактора; постройте графики.

1.2. Есть ли в микрокалькуляторе, в стандартной программе «Калькулятор» на компьютере, в изучаемом вами языке программирования возможность вычисления a^x?

К § 2 «Показательные уравнения»

2.1.!* Запишите алгоритм для нахождения решения уравнения $a^x = b$ для заданных $a > 0$ и b. Считайте, что искомое решение найдено, если a^x отличается от b менее чем на 0,01.

К § 4 «Логарифм и его свойства»

4.1. Найдите в микрокалькуляторе, в стандартной программе «Калькулятор» на компьютере, в изучаемом вами языке программирования средства для вычисления логарифма. По какому основанию вычисляется логарифм? Как использовать эти средства для вычисления логарифма по любому требуемому основанию?

К § 5 «Логарифмическая функция и её свойства»

5.1. Составьте в табличном редакторе таблицу значений логарифмических функций с разными основаниями и показательных функций, обратных им. Постройте графики этих функций в одной системе координат. Какие свойства этих функций иллюстрируют полученные графики?

К § 8 «Производные показательной и логарифмической функций»

8.1. Каким образом в микрокалькуляторе, в стандартной программе «Калькулятор» на компьютере, в изучаемом вами языке программирования задаётся число e? Есть ли средства для вычисления натурального логарифма? Каким образом при наличии только одного из этих инструментов выполнять действия, требующие второго из них?

К § 11 «Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл»

11.1. Найдите в Интернете информацию о численных методах интегрирования.

11.2.* Непрерывная функция задана формулой. Составьте программу для приближённого вычисления определённого интеграла этой функции на заданном промежутке.

Вычислите с помощью этой программы несколько интегралов из упражнений к этому параграфу и сравните результаты с результатами, полученными вами в ходе выполнения упражнений.

К § 12 «Вычисление объёмов тел»

12.1.* Непрерывная функция задана формулой. Напишите программу для приближённого вычисления объёма тела, полученного в результате вращения графика данной функции вокруг оси абсцисс на заданном промежутке.

К § 14 «Перестановки. Размещения»

14.1.* Напишите программу для вычисления факториала натурального числа, используя целые типы данных. Определите, на каких значениях исходных данных программа перестанет работать из-за переполнения.

14.2.!* Ознакомьтесь с понятием рекурсии. Как, используя это понятие, сформировать весь набор перестановок для заданного множества?

14.3.!* Как сформировать весь набор размещений по k элементов для заданного множества из n элементов?

К § 15 «Сочетания (комбинации)»

15.1.* Напишите программу, которая по заданным натуральным n и k выдаёт значения P_n, A_n^k, C_n^k. Какие проверки и ограничения надо учесть?

Воспользуйтесь результатами, полученными при написании программы вычисления факториала.

15.2.!* Как сформировать весь набор сочетаний по k элементов для заданного множества из n элементов?

К § 16 «Бином Ньютона»

16.1.* Напишите программу для получения биномиальных коэффициентов для заданного n.

16.2.* Напишите программу для записи формулы бинома Ньютона для заданного n. Учтите, что начиная с некоторого значения n длина получаемой формулы будет превышать размер одной строки на экране компьютера.

16.3.* Напишите программу для получения треугольника Паскаля. Учтите необходимость оформления выходных результатов в виде треугольника.

К § 17 «Операции над событиями»

17.1. С помощью каких инструментов можно описывать события и моделировать операции над событиями на компьютере?

17.2. Представьте испытание с n равновозможными результатами в виде таблицы из n строк в табличном редакторе. Как можно определять вероятность события с помощью этого инструмента? Проиллюстрируйте с помощью такого представления понятия, изученные в этом параграфе.

К § 18 «Зависимые и независимые события»

18.1. Встречали ли вы в курсе информатики объекты, представленные в виде древовидной схемы? Что общего у этих объектов с дендрограммой? Как можно использовать навыки работы с этими объектами в изучаемом курсе?

К § 19 «Схема Бернулли»

19.1.* Напишите программу для вычисления вероятности в ситуациях, которые можно описать схемой Бернулли. Опишите применение этой программы в наиболее общем виде так, чтобы ею могли пользоваться в практических целях люди, не имеющие соответствующих теоретических знаний. Как с этой целью следует организовать диалог программы с пользователем?

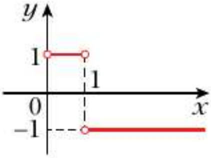
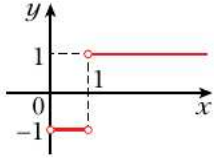
К § 20 «Случайные величины и их характеристики»

20.1.* Ознакомьтесь с понятием «датчик случайных чисел». Найдите в изучаемом языке программирования средства получения случайных чисел. С помощью датчика случайных чисел смоделируйте некоторые испытания, описанные в этом параграфе.

Ответы и указания к упражнениям

1.15. 1) $-6a^{\sqrt{5}} - 13$; 2) $\frac{1}{a^{2\sqrt{7}}}$; 3) $\frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}}}$; 4) $2a^{\sqrt[3]{3}} - a^{2\sqrt[3]{3}}$. **1.16.** 1) $a^{\sqrt{6}} + 1$; 2) $4^{\frac{1}{\pi}}ab$. **1.17.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **1.18.** 3) $(-4; +\infty)$; 4) $[1; +\infty)$. **1.19.** 36. **1.20.** $[-2; 4]$. **1.22.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$. **1.23.** $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **1.28.** $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{-5,2} > \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{5,6}$. *Указание*. Числа $7 + 4\sqrt{3}$ и $7 - 4\sqrt{3}$ являются взаимно обратными. **1.29.** 1) Корней нет; 2) 3 корня; 3) бесконечно много корней; 4) 2 корня. **1.30.** 1) 1 корень; 2) бесконечно много корней; 3) 2 корня. **1.33.** *Указание*. Найдите область определения данной функции. **1.34.** 1) 4; $\frac{1}{4}$; 2) 1; –1. **1.35.** 1) 6; $\frac{1}{6}$; 2) 6; $5\frac{1}{5}$. **1.38.** 3) $33 \cdot 2^{x-4}$; 4) $13 \cdot 3^{x-1}$; 5) $5 \cdot 2^{x+1}$; 6) $-29 \cdot 6^{x-1}$; 7) $12 \cdot 9^{x}$; 8) $576 \cdot 5^{x-2}$. **2.3.** 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **2.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **2.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **2.6.** 1) 1; 2) –1; 2. **2.7.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 2; 5) –2; 6) $\frac{1}{10}$. **2.8.** 1) $-\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$; 2) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 6,5. **2.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 3; 7) 2; 8) 0; $\frac{1}{2}$. **2.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 4; 6) 0; $\frac{1}{3}$. **2.11.** 1) –1; 1; 2) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) –1; 2; 6) 1. **2.12.** 1) –1; 1; 2) 1; 2; 3) 1; 4) –1; 5) 0; 6) 2. **2.13.** 1) 2; 2) –1; 1; 3) 2. **2.14.** 1) 2; 2) 3; 3) 4. **2.15.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 3; –3; 3) 3; 4) 6; 5) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **2.16.** 1) 1; 2) 3; 3) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$. **2.17.** 1) 0; 1; 2) 0; –1; 3) –1; 4) 0. **2.18.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **2.19.** 2. **2.20.** 0. **3.4.** 1) 5; 2) 3; 3) 4. **3.5.** 1) –5; 2) 7. **3.6.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$. **3.7.** 1) $(-\infty; -2]$; 2) $(-\infty; 4]$. **3.8.** 1) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; 2) $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$; 3) $(-5; -3) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$; 5) $(0; 4]$; 6) $[-1; 2]$. **3.9.** 1) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$; 4) $(-1; +\infty)$. **3.10.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $(5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1]$; 5) $(-\infty; 0]$; 6) $(-\infty; 1)$. **3.11.** 1) $(-\infty; 2)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$. **3.12.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $[0; 1]$; 4) $(-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1]$; 6) $[1; +\infty)$. **3.13.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; 4) $[0; 2]$. **3.14.** 1) $(-\infty; 2) \cup (2; 3]$; 2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **3.15.** 1) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; 5)$. **3.16.** 1) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$;

2) $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **3.17.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$. **3.18.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-3;\ 1)$; 3) $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ +\infty)$; 4) $\{0\}$. **3.19.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **3.20.** $[0;\ 1]$. **3.21.** $[0; 4]$. **3.22.** 1) $(0; 1)$; 2) $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$. **3.23.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; 1]$. **3.24.** 0. **3.25.** 2; 3. **3.26.** $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; 7]$. **3.27.** $[0; 2]$. **4.21.** 4) 144; 5) 64; 6) 1; 7) 0; 8) 48. **4.22.** 4) 9; 5) 10; 7) 2. **4.23.** 1) -3; 2) -1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) $-\frac{1}{2}$. **4.24.** 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) -1. **4.25.** 1) 4; 2) 60; 3) 180; 4) 20; 5) 0,1. **4.26.** 1) 72; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 10. **4.27.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3. **4.28.** 1) -5; 2) -2. **4.29.** 1) 2; 2) 4. **4.30.** 1) 6; 2) 9. **4.31.** 30. **4.32.** 21. **4.33.** $\log_a b$. **4.34.** $\log_b a$. **4.37.** 1) $-1 < x < 1$; 2) $x \neq 1$; 3) $x < 2$; 4) $x \neq 2$. **4.38.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **4.39.** $\lg 2$. *Указание*. В каждом из логарифмов перейдите к основанию 10. **4.40.** $\frac{5}{2}$. **5.19.** 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$; 4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. **5.20.** 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{2}} 9 < -3$. **5.21.** 1) $\log_4 5 > \log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1{,}3 < \log_{1,3} 1{,}5$; 3) $\log_{0,7} 0{,}8 < \log_{0,8} 0{,}7$; 4) $\log_{0,2} 0{,}1 > \log_{0,1} 0{,}2$. **5.23.** 1) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **5.24.** 1) $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **5.27.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **5.28.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **5.29.** 1) 1 корень; 2) 1 корень; 3) 1 корень. **5.30.** 1) 1 корень; 2) 1 корень. **5.31.** $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$. *Указание*. Числа $\log_2 3$ и $\log_3 2$ являются положительными и взаимно обратными. **5.33.** 1) Все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\{0\}$; 3) все числа вида $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 5) $[-1; 0) \cup (0; 3]$; 6) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$; 7) $(0; 2) \cup (2; 3)$; 8) $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$. **5.34.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) все действительные числа, кроме чисел вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) все числа вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 5) $(-8; -2) \cup (-2; -1)$; 6) $(0; 7) \cup (7; 8)$; 7) $\left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$; 8) $(0; 4) \cup (4; 5)$; 9) $(-1; 1) \cup (1; 2)$;

Рисунок к упражнению 5.35 (3)	Рисунок к упражнениям 5.35 (4) и 5.36 (3)
	

10) $[-5; 0) \cup (0; 2]$. **5.35.** 3) См. рисунок; 4) см. рисунок. **5.36.** 3) См. рисунок. **5.37.** Если $a > 2$, то 2; если $1 \leqslant a < 2$, то -2. **5.38.** 5; $-\frac{5}{4}$. **5.39.** $\left(-2; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup (0; 2) \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$. **6.5.** 1) 16; 2) 64; 3) 6; 4) 6; 5) 512. **6.6.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10}. **6.7.** 1) 0,8; 2) 2; 3) 0; 4) -1. **6.8.** 1) 1; 2) 0; 1. **6.9.** 1) -2; 6; 2) 5; 3) корней нет; 4) -2; 5) 1; 6) -1; 7) 0; 8) 6. **6.10.** 1) -2; 2) корней нет; 3) 0; 13; 4) -2. **6.11.** 1) 7; 2) 1; 3) 1; 4) 2. **6.12.** 1) 3; 2) $\log_2 3$; 3) 2. **6.13.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) 4; 4) 5; 5) 8; 6) 4; 7) 4; 8) 7. **6.14.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) -1; 4; 5) 3; 6) 8. **6.15.** 1) $\log_5 4$; 2) 0. **6.16.** 1) 2; 2) $\log_3\left(3+\sqrt{11}\right)$. **6.17.** 1) 2; $\frac{1}{16}$; 2) 9; $\frac{1}{3}$; 3) 10; 1000; 4) 25; $\sqrt{5}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) 8; $10^7 - 2$. **6.18.** 1) -8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **6.19.** 1) 7; 2) корней нет; 3) 3; 4; 4) 1; 5) 4. **6.20.** 1) Корней нет; 2) 5; 3) 4; 4) 3; 5) 3. **6.21.** 1) $[1; 5] \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$; 2) $(-\infty; -1] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty)$; 3) $(-7; -5) \cup (4; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$. **7.5.** 1) 21; 2) 26. **7.6.** 1) 0; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5. **7.7.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(0; 1)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-3; -2) \cup (3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3] \cup [4; 9)$; 6) $\left(-\frac{11}{10}; 4\right] \cup [5; +\infty)$. **7.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 3) $[5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4] \cup [3; 5)$. **7.9.** 1) 6; 2) 2; 3) 2; 4) 5. **7.10.** 1) -1; 2) 3; 3) 1; 4) 0. **7.11.** 1) $[-1; 1) \cup (3; 5]$; 2) $(-2; -1) \cup (0; 1)$; 3) $(-6; -5) \cup (-5; -4)$; 4) $[-1; 0) \cup (3; 4]$; 5) $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right)$; 6) $\left(\frac{5}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; 7) $(-\infty; -2{,}5) \cup [2; +\infty)$; 8) $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$. **7.12.** 1) $(2; 3)$; 2) $[1; 2) \cup (4; 5]$; 3) $[-4; -3) \cup (0; 1]$; 4) $[0; 1) \cup (1; 2]$; 5) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$; 6) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. **7.13.** 1) $(3; 6]$; 2) $(1; 3]$;

3) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; 4) $\left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$; 5) $[-4; -3) \cup (1; 3]$; 6) $[-5; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right]$. **7.14.** 1) $(-3; -1)$; 2) $(4; 5]$; 3) $(-5; 7]$; 4) $\left[0; \frac{1}{2}\right) \cup (4; 13]$. **7.15.** 1) $(5; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(0; 4)$; 4) $(5; 7]$; 5) $\left(-1; -\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right]$. **7.16.** 1) $[-1; 0)$; 2) $(1; 2]$; 3) $[11; +\infty)$; 4) $\left[\frac{14}{3}; +\infty\right)$. **7.17.** 1) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$; 2) $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; +\infty)$; 3) $(0{,}0001; 10)$; 4) $\left[\frac{1}{16}; 256\right]$; 5) $(0; 4] \cup [8; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{81}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **7.18.** 1) $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [8; +\infty)$; 2) $(0; 0{,}1] \cup [1000; +\infty)$; 3) $(0{,}5; 4)$; 4) $[0{,}04; 5]$. **7.19.** 1) $\left(\frac{1}{128}; 2\right)$; 2) $(0; 3^{-10}] \cup [3; +\infty)$; 3) $[0{,}001; 1) \cup [100; +\infty)$; 4) $\left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup (1; 5]$. **7.20.** 1) $\left(0; \frac{1}{49}\right] \cup [7; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{216}; 6\right]$; 3) $(3; 9] \cup [81; +\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{4}; 1\right) \cup [2; +\infty)$. **7.21.** 1) $\left[\frac{1-\sqrt{27}}{2}; -2\right) \cup \left(3; \frac{1+\sqrt{27}}{2}\right]$; 2) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 3) $[1{,}5; +\infty)$; 4) $(3; +\infty)$. **7.22.** 1) $\left[-2; 1-\sqrt{5}\right) \cup \left(1+\sqrt{5}; 4\right]$; 2) $\left(\frac{3}{4}; 1\right)$. **8.5.** 1) 0; 2) -2; 3) $-15\ln 3$. **8.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $-5\ln 4$. **8.7.** 1) -1; 2) 3,5; 3) $-\frac{5}{2\ln 5}$; 4) $\frac{1}{2}$. **8.8.** 1) $\frac{6}{13}$; 2) 16; 3) $-\frac{1}{2\ln 10}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. **8.9.** 2) $\frac{2}{3}$. **8.10.** 1) -1; 2) $\frac{1}{\ln 5}$. **8.11.** 1) $y = -2x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = (2 + 2\ln 2)x - 2\ln 2$; 4) $y = 18x\ln 6 + 18\ln 6 + 6$; 5) $y = 4x - 1$; 6) $y = 4x + 4$; 7) $y = \frac{2x}{3\ln 3} - \frac{2}{3\ln 3} + 1$; 8) $y = x - 4 + 2\ln 2$. **8.12.** 1) $y = 5x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = 6x\ln 3 - 12\ln 3 + 3$; 4) $y = 4x - \ln 4$; 5) $y = 3x - 6$; 6) $y = \frac{x}{4\ln 2} - \frac{1}{4\ln 2} + 2$. **8.13.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **8.14.** $y = -1600$. **8.15.** 1) $y = ex$; 2) $y = 5x + 3$; 3) $y = -x + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$; 4) $y = 3x - 3$. **8.16.** 1) $y = -7x + 7$; 2) $y = 2x$; 3) $y = x + 1 + \ln 5$; 4) $y = -x$. **8.17.** 1) Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) возрастает на $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$,

$x_{min} = -\frac{1}{2}$; 3) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$, $x_{max} = 0$; 4) возрастает на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{min} = 0$, $x_{max} = \frac{2}{\ln 2}$; 5) возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; 6) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$; 7) возрастает на $(-\infty; 2]$, убывает на $[2; +\infty)$, $x_{max} = 2$; 8) возрастает на $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2)$ и $(2; 3]$, $x_{min} = 3$; 9) возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; 10) возрастает на $\left[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, убывает на $\left(0; e^{-\frac{1}{3}}\right]$, $x_{min} = e^{-\frac{1}{3}}$; 11) возрастает на $(0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; 12) возрастает на $\left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right)$, убывает на $\left(0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$, $x_{min} = e^{-\frac{1}{2}}$; 13) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $x_{min} = 1$; 14) возрастает на $[e; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$ и $(1; e]$, $x_{min} = e$; 15) возрастает на $(0; e^2]$, убывает на $[e^2; +\infty)$, $x_{max} = e^2$; 16) возрастает на $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $(0; 1]$, $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$; 17) возрастает на $(0; 1]$ и $[e; +\infty)$, убывает на $[1; e]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = e$; 18) возрастает на $\left[\sqrt{10}; +\infty\right)$, убывает на $\left(0; \sqrt{10}\right]$, $x_{min} = \sqrt{10}$. **8.18.** 1) Возрастает на $[-2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$, $x_{min} = -2$; 2) возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, $x_{max} = 0$, $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$; 3) возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = -1$; 4) возрастает на $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$, $x_{min} = -\frac{1}{4}$; 5) возрастает на $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, убывает на $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$, $x_{max} = \frac{3}{\ln 3}$; 6) возрастает на $(-\infty; -2]$, убывает на $[-2; +\infty)$, $x_{max} = -2$; 7) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $x_{min} = 1$; 8) возрастает на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $\left[\frac{1}{e^2}; 1\right]$, $x_{max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{min} = 1$; 9) возрастает на $(0; e]$, убывает на $[e; +\infty)$, $x_{max} = e$; 10) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$, $x_{min} = 1$; 11) возрастает на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ и $[e^2; +\infty)$, убывает на $\left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$, $x_{max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{min} = e^2$; 12) возрастает на $\left[\frac{1}{10}; 1\right]$ и $[10; +\infty)$, убывает на $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ и $[1; 10]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = \frac{1}{10}$, $x_{min} = 10$. **8.19.** 1) $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$; 2) e^2; 0;

Рисунок к упражнению 8.21

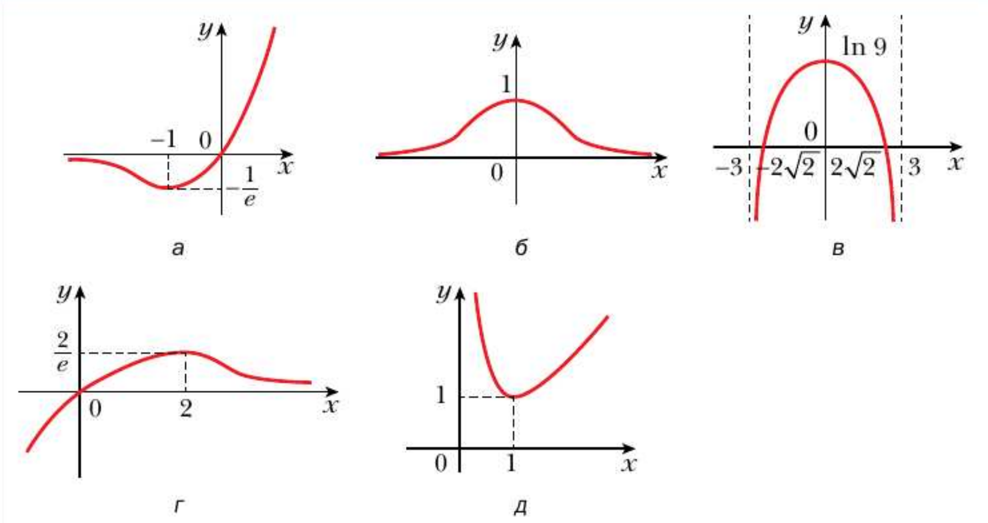
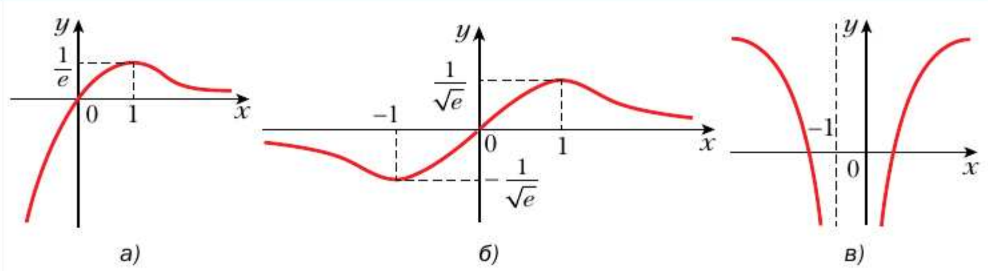


Рисунок к упражнению 8.22



3) 1; $\frac{1}{7}$; 4) $2\frac{1}{2}$; 2. **8.20.** 1) $\frac{1}{e^2}$; 0; 2) 125; $\frac{1}{5}$. **8.21.** См. рисунок. **8.22.** См. рисунок. **9.8.** 1) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{10}{3}$; 2) $y = -\cos x - 2$; 3) $y = e^x - 7$. **9.9.** 1) $y = \frac{x^4}{4} + 1$; 2) $y = \sin x + 2$; 3) $y = \frac{3^x}{\ln 3}$. **9.10.** 1) $y = -\frac{1}{x} - 6$; 2) $y = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$; 3) $y = \ln(-x) + 4$; 4) $y = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$. **9.11.** 1) $y = -\operatorname{ctg} x + 1$; 2) $y = 2\sqrt{x} + 2$; 3) $y = \ln x - 1$; 4) $y = \frac{2^x + \ln 2 - 32}{\ln 2}$. **9.15.** $\frac{1}{2}$. **9.16.** $-\frac{1}{2}$. **9.17.** -1; $-\frac{7}{2}$. **9.18.** 1) $(2; 5)$; 2) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$. **9.19.** $[2; 3) \cup (3; +\infty) \cup \{1\}$. **10.5.** 1) $F(x) = x - x^2 + 8$;

2) $F(x)=x^3-2x^2+5$; 3) $F(x)=-\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{2}+6{,}5$; 4) $F(x)=\frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{5}{3}$; 5) $F(x)=4x+\frac{1}{x}-4$; 6) $F(x)=7\ln(x-4)+2\sqrt{x+4}$; 7) $F(x)=\sqrt{6x+1}+2$; 8) $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}$; 9) $f(x)=\frac{(3x-2)^3}{9}-\frac{1}{9}$; 10) $F(x)=\frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)$.
10.6. 1) $F(x)=3x-3x^2+6$; 2) $F(x)=x^4-2x^3+x+5$; 3) $F(x)=x^2-2\sqrt{x}-2$; 4) $F(x)=-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{2}{3}$; 5) $F(x)=8\sqrt{\frac{x}{2}-2}+4$; 6) $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}+3{,}5$; 7) $F(x)=\frac{1}{4}\ln(4x-3e^2)+5{,}5$; 8) $F(x)=-8\operatorname{ctg}\frac{x}{8}+5$. **10.7.** $F(x)=x^4+2x^2-3$, первообразная имеет ещё один нуль, равный 1. **10.8.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-12x+27$. **10.9.** 1) F_2; 2) F_2. **10.10.** F_1. **10.11.** $s(t)=\frac{t^3}{3}+t^2-3t$. **10.12.** $s(t)=2t^3+t-47$ или $s(t)=2t^3+t-67$. **10.13.** $y=2x^3-x^5+7$. **10.14.** $y=6\sqrt{x}+x-21$. **10.15.** 1) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. *Указание*. Примените формулы понижения степени; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$. *Указание*. Примените формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму; 3) $\frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3}-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. **10.16.** 1) $\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 2) $\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{18}\sin 9x+C$. **10.17.** $F_1(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\frac{5}{6}$, $F_2(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-\frac{323}{24}$. **10.18.** $F_1(x)=\frac{x^3}{3}-4x+\frac{2}{3}$, $F_2(x)=\frac{x^3}{3}-4x-\frac{20}{3}$. **10.19.** $F(x)=-x^2+5x-\frac{17}{4}$. **10.20.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-3{,}5$. **10.22.** Если $0<b<a$, то 0; если $0<a<b$, то $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **10.24.** $[1;+\infty)$. **10.25.** $a>0$, $b<0$, $c>0$. **11.5.** 1) $4\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3e^2-1}{e^2}$; 10) 18. **11.6.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) $8\ln 2$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{52}{3}$; 6) $\frac{72-2\ln 3}{\ln 3}$. **11.8.** 1) 70; 2) 1,5; 3) $\sqrt{3}$; 4) 39; 5) 0; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}\ln 5$; 8) 3; 9) 0; 10) $6e-6$; 11) $-\frac{1}{9}$; 12) 240. **11.9.** 1) -45; 2) 6; 3) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{288}$; 7) $\frac{1}{3}\ln 10$; 8) $\frac{1}{12}$; 9) $\frac{78}{7}$. **11.10.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) e^2-3; 4) $4\ln 4-3$; 5) $12-4\ln 4$;

6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1; 13) $24 - 7\ln 7$; 14) 2; 15) $\sqrt{2} - 1$. **11.11.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $6 - 3\ln 3$; 7) 1; 8) $12 - 5\ln 5$. **11.12.** 3. **11.13.** 3; –3. **11.14.** 2; –2. **11.15.** 6. **11.16.** $-\sqrt[4]{8}$. **11.17.** 1) $(0; 1) \cup (3; +\infty)$; 2) $(\log_{0,2} 6; +\infty)$. **11.18.** $(1; +\infty)$. **11.19.** 1) $\frac{4-\pi}{12}$; 2) $\pi - 2$; 3) 0; 4) $\frac{3e^2 + 8e - 8}{8e^2}$. **11.20.** 1) $\frac{20-5\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0,2; 4) $e^2 - e - \frac{1}{2}$. **11.21.** 1) 16,5; 2) 4,5; 3) $21\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) 7,5; 6) $8 - 4\ln 2$. **11.22.** 1) 4,5; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) 4,5; 4) 9. **12.1.** 1) $\frac{13\pi}{3}$; 2) $\frac{178\pi}{15}$; 3) $\frac{15\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{15}$; 5) $\frac{19\pi}{24}$. **12.2.** 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **12.3.** $\frac{9}{8}\pi R^3$, $\frac{5}{24}\pi R^3$. **13.5.** $\frac{n}{2n+1}$. **13.6.** $\frac{n}{n+1}$. **13.9.** 1) *Указание.* $3^{2k+3} + 2^{k+3} = (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \cdot 2 + 7 \cdot 3^{2k+1}$; 2) *Указание.* Достаточно показать, что разность $(6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2}) - 19(6^{2k} + 19^k - 2^{k+1})$ кратна 17. **13.10.** 1) *Указание.* $7^{k+2} + 8^{2k+1} = 7(7^{k+1} + 8^{2k-1}) + 57 \cdot 8^{2k-1}$. **14.1.** 7!. **14.2.** 5!. **14.3.** A_{11}^2. **14.4.** A_{15}^3. **14.5.** A_{16}^6. **14.6.** A_{24}^2. **14.7.** A_9^3. **14.8.** A_5^3. **14.9.** 1) 10; 2) 3; 3) 1. **14.11.** 1) 12; 2) 7; 3) 7; 4) 14. **14.12.** 1) 5; 2) 9, 10; 3) 4. **14.13.** $n!$. **14.15.** 30!. **14.16.** A_{25}^6. **14.17.** A_n^5. **14.18.** $9 \cdot 10^3 \cdot 2$. **14.19.** $9 \cdot 10^4 \cdot 4$. **14.20.** $(7! \cdot 4! \cdot 2!) \cdot 3!$. **14.21.** $(5!)^2$. **14.22.** A_{32}^2. **14.23.** $A_3^2 \cdot A_5^4$. **14.24.** $A_{15}^3 \cdot A_{12}^4 = A_{15}^4 \cdot A_{11}^3$. **14.25.** $9 \cdot 10^4 - 4 \cdot 5^4$. *Указание*. Количество всех пятизначных чисел равно $9 \cdot 10^4$. Количество пятизначных чисел, все цифры которых чётны, равно $4 \cdot 5^4$. **14.26.** $9 \cdot 10^4 - 5^5$. **14.27.** $9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. *Указание*. Количество пятизначных чисел, все цифры которых различны, равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. **14.28.** $6^3 - 5^3$. **15.5.** 1) 18; 2) 6; 3) 10; 4) 4. **15.6.** 1) 16; 2) 6; 3) 12; 4) 5. **15.7.** C_{29}^5. **15.8.** C_{10}^3. **15.9.** C_n^4. **15.10.** C_7^2. **15.11.** $C_5^2 \cdot C_{12}^5$. **15.12.** $C_{11}^3 \cdot C_{20}^3$. **15.13.** $C_5^2 \cdot C_7^2$. **15.14.** $C_{12}^2 \cdot C_7^2$. **15.15.** $C_7^2 \cdot C_{13}^3$. **15.16.** $C_{12}^3 \cdot C_{88}^7$. **15.17.** $C_{35}^1 \cdot C_{34}^1 \cdot C_{33}^4$. **15.18.** $7 \cdot C_{12}^2 + 12 \cdot C_7^2$. **15.19.** $C_8^1 + C_8^3 + C_8^5 + C_8^7$. **15.20.** $C_{15}^{10} + C_{15}^{11} + C_{15}^{12} + C_{15}^{13} + C_{15}^{14} + C_{15}^{15}$. **15.21.** Способ 1: $C_7^2 \cdot C_{13}^3 + C_7^3 \cdot C_{13}^2 + C_7^4 \cdot C_{13}^1 + C_7^5 \cdot C_{13}^0$; способ 2: $C_{20}^5 - C_7^0 \cdot C_{13}^5 - C_7^1 \cdot C_{13}^4$. **15.22.** $C_{100}^{10} - C_{12}^0 \cdot C_{88}^{10} - C_{12}^1 \cdot C_{88}^9$. **15.23.** Способ 1: $C_{18}^7 + C_{19}^6 + C_{19}^6$; способ 2: $C_{20}^7 - C_{18}^5$. **15.24.** $\frac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{3!}$. **15.25.** $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$. **15.26.** $C_{12}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot P_4$. **16.5.** 5^n.

16.6. 0. *Указание.* Подставьте в формулу бинома Ньютона $a = 1$, $b = -1$. **16.7.** 1. **16.10.** 2. **16.11.** $\frac{1}{2^{100}}$. **16.12.** 17. **16.13.** 67. **16.14.** 49. **16.15.** Тринадцатый член разложения имеет вид $C_{22}^{12}x^2$. **16.16.** 8. **16.17.** 6. **16.18.** 3. **16.20.** $A = B = 2^{100}$. *Указание.* Докажите, что $A + B = 2^{101}$, а $A - B = 0$. **17.3.** $\bar{A} = Y$; 2) $A \cup B = T$; 3) $A \cap \bar{B} = Z$. **17.8.** 1) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[0; 1)$; 5) $[1; 2]$. **17.9.** 3) Один из следующих: 0:0, 1:1, 0:1, 0:2; 4) любой счёт в пользу команды «Локомотив», кроме 3:0; 5) любой счёт. **17.13.** 26%. **17.14.** 51%. **17.15.** $\frac{6}{7}$. **17.16.** $\frac{2}{3}$. **17.17.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{2}{3}$. **17.18.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{5}{8}$. **17.19.** 12%. **17.20.** 0,7. **17.21.** 0,67. **17.22.** 1) 35%; 2) 25%. **17.24.** 1) 0,03; 2) 0,01; 3) 0,05; 4) 0,04. **17.25.** 1) 40%; 2) 20%; 3) 10%; 4) 30%. **18.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 0. **18.4.** $\frac{1}{2}$. **18.8.** 1) 0,2; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0,4. **18.9.** 1) 0,5; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{12}$. **18.12.** $\frac{8}{15}$. **18.13.** $\frac{10}{11}$. **18.14.** 24%. **18.16.** $p(1-p)^5$. **18.18.** 1) $\frac{7}{9}$; 4) 1. **18.19.** 1) $\frac{5}{7}$; 2) $\frac{1}{2}$. **18.20.** 82%. **18.21.** 39,2%. **18.22.** 2,4%. **18.23.** $\frac{10}{27}$. **18.24.** $\frac{1}{3}$. **18.25.** Нет. *Указание.* Если A и B — несовместные и независимые события, то $0 = P(A \cap B) = P(A)P(B)$. **18.27.** 1) 14%; 2) 9%; 3) 6%; 4) 36%; 5) 6%; 6) 41%; 7) 55%. **18.28.** 1) 72,9%; 2) 24,3%; 3) 2,7%; 4) 0,1%. **18.29.** 1) 6,25%; 2) 40,96%; 3) 10,24%; 4) 40,96%. **18.30.** $2p - p^2$. **18.31.** $1 - (1 - p)^4$. **19.5.** $C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 16$ %. **19.6.** $C_{10}^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 12$ %. **19.7.** $C_9^6p^6(1-p)^3$. **19.8.** $C_{15}^2p^2(1-p)^{13}$. **19.9.** $C_8^5 0{,}8^5 0{,}2^3 \approx 15$ %. **19.10.** $C_{10}^3 0{,}1^3 0{,}9^7 \approx 5{,}7$ %. **19.11.** $C_6^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^4 \approx 14$ %. **19.12.** $C_r^k\left(\frac{n}{n+m}\right)^k\left(\frac{m}{n+m}\right)^{r-k}$. **19.13.** $C_n^k\left(\frac{1}{r}\right)^k\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-k}$. **19.14.** $C_6^5 0{,}65^5 0{,}35 + 0{,}65^6 \approx 32$ %. **19.15.** $1 - (C_{25}^1 0{,}08 \cdot 0{,}92^{24} + 0{,}92^{25}) \approx 61\%$. **19.16.** $C_{40}^{38} 0{,}97^{38} 0{,}03^2 + C_{40}^{39} 0{,}97^{39} 0{,}03 + 0{,}97^{40} \approx 88\%$. **19.17.** 1) $\left(-1-\sqrt{5}; -2\right) \cup \left(-2; -1+\sqrt{5}\right)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **19.18.** 1) $\left[0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $[2; 4]$. **19.19.** 1) 4; 2) $[-4; -1]$. **20.4.** 2) 0,1; 3) 0. **20.5.** Нет. **20.6.** 3) $\frac{1}{30}$. **20.7.** 3) 30%; 4) 35%; 5) 72%. **20.8.** 1) 0,11; 2) 0,53; 3) 1; 4) 0,78.

20.9.

Значение x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

20.11.

Значение x	1	2	3	4
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

20.12.

Значение x	1	2	3	4	5
Вероятность	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

20.13.

Значение x	1	2	3
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$

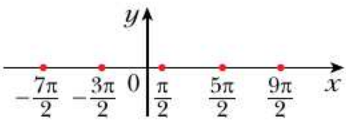
20.14. 3,8. **20.15.** 1,8. **20.16.** 3. **20.17.** $\frac{385}{51}$. **20.20.** 200 р. **20.21.** 0,5. **20.22.** 2,5.

Ответы к упражнениям для повторения курса алгебры

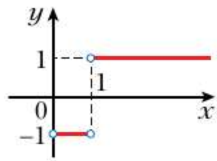
19. 14. **20.** 20. **21.** 2. **22.** 3. **23.** 11 букетов. **24.** $\frac{a^2}{2}$. **25.** $\frac{a}{b}=2$. **26.** $\frac{b^2}{a}$. **27.** 4. **28.** 4. **32.** 1) 6; 2) 3; 3) 3. **36.** 1) 15; 2) 22. **38.** 1) 22; 2) 18. **41.** 1) $\frac{2}{5}$. *Указание.* $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$; 2) $\frac{27}{58}$. **42.** 1) *Указание.* Каждое слагаемое данной суммы, кроме последнего, больше $\frac{1}{24}$. Тогда $\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{24}>\underbrace{\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{24}}_{8\text{ слагаемых}}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$. **45.** 48. **46.** $\frac{a^2}{b^2}$. **47.** 2. **48.** 56. **49.** $a+b$. **50.** $b<0$. **52.** 0,9 бассейна. **53.** Нет. **58.** 36 пакетов. **59.** 14 банок. **60.** 32 ч. **61.** 15 ч. **62.** 7 ч 30 мин. **63.** 11 дней. **73.** 6 учащихся. **76.** 1) 9 тетрадей; 2) 27 тетрадей. **78.** В 2 раза. **79.** 54 ч. **81.** 8,4 кг. **82.** 20 дней. **85.** В 1,5 раза. **87.** 40%. **88.** 3 кг. **89.** Уменьшилась на 25%. **91.** 90 000 р., 30 000 р. **92.** 200 г, 400 г. **93.** 20 кг, 30 кг. **98.** 4%. **99.** 9%. **100.** 300%. **101.** 75%. **104.** 72 600 р. **105.** 20%. **106.** 5%. **107.** 10%. **108.** 10 кг или $5\frac{1}{3}$ кг. **109.** 20 кг. **110.** 30 кг. **111.** 10,2. **113.** 13. **114.** 202 см. **117.** 2 ч 15 мин, 2 ч 24 мин. **165.** 1) Корней нет; 2) 2; 3) 4; 4) 1,5; 5) 4; 6) –3; 7) –2; 8) 2. **170.** 1) –7; –4; –2; 1; 2) 0; –4; 3) –20; –5; –2; 4; 4) $-\frac{4}{3}$; 7. **184.** 1) (2; –3); 2) $\left(\frac{1}{3};-1\right)$; 3) (4; 2); 4) (8; –9); 5) $\left(\frac{23}{3};8\right)$; 6) $\left(5;\frac{5}{3}\right)$. **186.** 1) $a\neq 5$; 2) $a=-4$; 3) $a\neq -3{,}5$. **187.** 1) (9; 9); 2) (–4; –1); 3) $\left(\frac{5}{4};\frac{11}{12}\right)$; 4) (2; –3). **188.** 2) (–2; 1); 3) (1; 1), (3,6; 11,4); 4) (0,5; 2), $\left(-1{,}5;\frac{2}{3}\right)$. **189.** 2) (–1; 4), (–6; –1); 3) (3; –1); 4) параболы не пересекаются. **190.** 2) (2; 3), (10; 27), (–2; –3), (–10; –27); 3) (–1,5; –5,5), (1,5; 5,5); 4) $\left(\sqrt{5};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{5};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{5};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{5};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$; 5) (–1; 6), $\left(-\frac{1}{5};10\right)$; 6) (2; 1), (–2; –1). **191.** 3) (2; 6), (–2; –6), $\left(2\sqrt{5};-2\sqrt{5}\right)$, $\left(-2\sqrt{5};2\sqrt{5}\right)$. **205.** 5) $(-\infty;18]$; 6) $\left(\frac{24}{31};+\infty\right)$. **208.** 3 решения. **209.** 4 решения. **210.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $\varnothing$; 3) $(-\infty;+\infty)$; 4) $\varnothing$. **211.** 1) $a<-\frac{1}{4}$; 2) $a\leqslant 6{,}4$. **212.** 3) $\left(-\frac{4}{11};5\right)$; 4) $\varnothing$. **215.** 1) При $a>6$; 2) при $a\leqslant 6$. **216.** 1) Если $a<1$, то $x \leqslant a$; если $a \geqslant 1$, то $x < 1$; 2) если $a < -4$, то $a < x < -4$; если $a \geqslant -4$, то решений нет. **217.** При $9 \leqslant a < 10$. **218.** При $-5 \leqslant b < -4$. **219.** 11) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$; 12) $(-\infty; -10) \cup (1; +\infty)$. **220.** 1) 11; 2) 4. **221.** 1) -7; 2) -2. **222.** 1) 0; 2) -3. **223.** 1) $-6 < a < 6$; 2) $-12 < a < 8$. **224.** 1) $b < -\frac{1}{9}$ или $b > 1$; 2) $b < 2$ или $b > 8$. **225.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 4\right)$; 2) $(-3; 0] \cup [2; 9)$. **226.** 1) $(-10; 10)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$. **230.** 3) $(-\infty; -2\sqrt{3}] \cup (-2; 0) \cup (2; 2\sqrt{3}]$; 4) $[-4; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; 4]$. **234.** 6) $-\frac{1}{36}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) 56. **235.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2+1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$. **252.** 1) $\frac{4}{\sqrt{a}-a}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\sqrt{x}$; 4) $\frac{18}{4-a}$. **253.** 1) 3; 2) 1; 3) 1. **256.** 1) $1-2a$; 2) -1. **258.** 6. **259.** 7. **260.** 5) $\frac{35}{9}$; 6) 7,2. **262.** $[-4; -2]$. **263.** 1) 1 корень; 2) 2 корня; 3) 2 корня. **264.** 24. **265.** 4. **266.** 5) 4; 6) -4; 7) 4; 8) 10; 9) 5; 10) 7. **267.** 1. **268.** 4) -1; 17; 6) -1; 3. **269.** -2. **270.** 5) $[-6; 4]$; 6) $[7; 8) \cup (8; +\infty)$; 7) $\{5\}$; 8) $\varnothing$; 9) $(-\infty; -7) \cup [3; 7) \cup (7; +\infty)$; 10) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; 11) $[-3; 0) \cup [2; +\infty)$; 12) $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty) \cup \{3\}$. **271.** $y = -\sqrt{-x}$. **272.** 1) $[-5; +\infty)$; 3) $\{0\}$; 4) $(-\infty; 0]$; 5) $(-\infty; 3]$; 6) $(0; 1]$. **281.** 2) $(-1; 5)$, $\left(\frac{7}{3}; \frac{35}{9}\right)$; 3) $(0; 0)$, $(\sqrt{2}; 8)$, $(-\sqrt{2}; 8)$; 5) $(-5; 5)$; 6) $(2; 2)$. **290.** $p = 4$, $q = 7$. **291.** $y = \frac{3}{4}x^2$. **292.** $y = -8x^2 + 3$. **293.** $p = -6$, $q = 13$. **294.** $a = \frac{4}{9}$, $b = -\frac{8}{9}$, $c = -\frac{5}{9}$. **297.** $c = -10$. **299.** Графики всех трёх функций различны. **300.** 1) $k > 0$, $b < 0$; 2) $k < 0$, $b > 0$. **301.** $a < 0$, $b > 0$. **302.** $a > 0$, $b > 0$. **306.** -6. **313.** При $m = 0$ имеем: -1, 1, 3; при $m = 2$ имеем: 5, 5, 5. **317.** $a_1 = -1$, $d = 6$. **319.** 1377. **320.** 210. **321.** 280. **322.** 240. **323.** 616. **328.** При $x = 1$ имеем: 1, 2, 4; при $x = 2$ имеем: 3, 3, 3. **331.** $-\frac{3}{4}$. **333.** -4. **334.** 1) $1 \leqslant a \leqslant 3$; 2) $a = 1$. **335.** 1) 5; -3; 2) 7; 6; 3) выражение не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения. **342.** 1) 3; 2; 2) выражение не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения. *Указание*. Области определения данного выражения не принадлежат значения α, при которых $\sin\alpha = 0$ и $\sin^2\alpha = 1$. **343.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$; 2) $-\frac{2}{\cos\alpha}$. **345.** 1) 2; 2) 5. **347.** 1) $\frac{1}{4}\sin\alpha$; 2) $4\cos 4\alpha$; 3) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$; 4) -1. **348.** 41. **352.** 1) $\frac{1}{\sin 5\alpha}$; 2) $2\cos 2\alpha$; 3) $-\frac{1}{2}\sin\alpha$. **366.** 1) πn,

$n \in \boldsymbol{Z}$; 2) корней нет; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, или $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **367.** $\frac{\pi}{2}$. **368.** $-\frac{7\pi}{12}$. **377.** 2) $(-1; 4]$; 3) $[0; 4]$; 4) $[0; 4]$; 5) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$; 6) $[2; 3) \cup [7; +\infty)$; 7) $(-\infty; -1) \cup (3; 6]$; 8) $(-3; 0)$. **378.** 1) 2; 2) 5; 3) 1; 4) 8; 5) 3; 6) $\frac{8}{3}$. **379.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $(2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 3]$; 6) $(-\infty; -1]$. **380.** 1) 4; 2) $\log_3 2$; 3) $\log_7 5$; 4) 1; 5) 3; $3\log_6 2$; 6) 0; 3; 7) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 8) -1; 2; 9) 3; 10) 1; $\log_3 \frac{5}{4}$. **381.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[-2; 1]$; 3) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$; 4) $[-2; +\infty)$; 5) $(-\infty; -2]$; 6) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. **382.** 1) $\log_{1,5} 10$; 2) -2; 3) 0; 4) -1; 0; 1. **385.** 2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3) \cup (3; +\infty)$; 5) $(0; 1) \cup (1; 2)$; 6) $(2; 3) \cup (3; +\infty)$. **389.** См. рисунок. **394.** 2) 50;

Рисунок к упражнению 389



5)

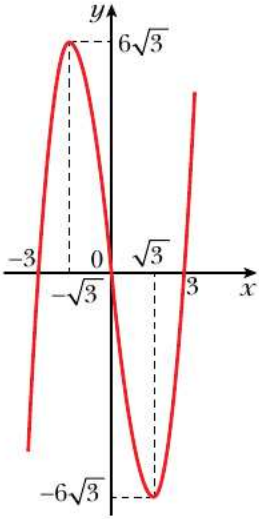


6)

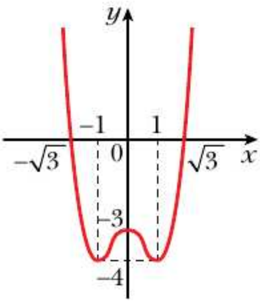
3) 27; 6) 0; 7) 2; 8) корней нет; 9) корней нет. **395.** 4) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; 5) $[-5; -4) \cup (0; 1]$; 6) $[-4; -3) \cup (1; 2]$; 7) $(-3; -2) \cup (-2; -1)$; 8) $[-2; -1)$; 9) $(-1; 0) \cup (0; 2)$. **396.** 3) Корней нет; 4) 5; 5) 0; 6) корней нет; 7) -2; 8) -4. **397.** 3) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 4) $(1; 3)$; 5) $(-4; 6)$; 6) $(-1; 1)$; 7) $(0; 9]$; 8) $(-\infty; -5)$. **398.** 1) $(-\infty; -1)$; 2) $(2; +\infty)$. **399.** 1) 1,5; 2) 5,5; 3) 2; 3; 4) -1. **400.** 1) $(0; 1]$; 2) $(1; 3]$; 3) $[3; 4)$; 4) $(-2; 0]$. **401.** 1) $\frac{1}{27}$; $\sqrt[3]{9}$; 2) e^7; $\frac{1}{e^3}$; 3) 10; 100; 4) 10 000; 5) 27; $\frac{1}{3}$; 6) 5; $\sqrt[9]{5}$; 7) $\frac{1}{7}$; 1; 7; 8) 81; 3. **402.** 1) $(0; 1] \cup [10; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$; 3) $\left(0; \frac{1}{32}\right] \cup [8; +\infty)$; 4) $\left[-3; -\frac{1}{9}\right]$; 5) $(10; 100) \cup (100; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{216}\right) \cup (1; 36)$. **403.** 1) $\frac{1}{5}$; 125; 2) $\frac{1}{10}$; 100; 3) 7; $\frac{1}{\sqrt{7}}$; 4) 6; $\frac{1}{36}$. **406.** 1) $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$; 2) $[-1; 0) \cup (0; 1]$; 3) $(-\infty; 2]$. **410.** 1) $y = x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $y = -\frac{1}{2}x - 2$; 3) $y = -\frac{x\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $y = 4x - 7$. **412.** $(2; 3)$. **413.** $(12; 0)$; $(0; 12)$; $(0; 0)$.

414. (1; 0). **415.** $y = 5x$ и $y = 5x - 27$. **416.** $\frac{8}{3}$. **421.** 1) Возрастает на $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right]$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$, $x_{max} = \frac{1}{4}$, $x_{min} = -\frac{1}{3}$; 2) возрастает на $\boldsymbol{R}$; 3) возрастает на $(-\infty; 0]$ и $[4; +\infty)$, убывает на $[0; 4]$, $x_{max} = 0$, $x_{min} = 4$; 4) возрастает на $(-\infty; -4]$ и $[4; +\infty)$, убывает на $[-4; 0)$ и $(0; 4]$, $x_{max} = -4$, $x_{min} = 4$; 5) возрастает на $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $(0; 1]$, $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$; 6) возрастает на $(-\infty; -2)$, $(-2; 1]$, $[4; +\infty)$, убывает на $[1; 2)$ и $(2; 4]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = 4$; 7) возрастает на $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$; 8) возрастает на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2]$, $x_{min} = 2$; 9) возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; +\infty)$, $x_{max} = -1$; 10) возрастает на $[2; +\infty)$, убывает на $(0; 2]$, $x_{min} = 2$; 11) возрастает на $[e^2; +\infty)$, убывает на $(0; e^2]$, $x_{min} = e^2$; 12) возрастает на $(0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$. **422.** 1) 1; –6; 2) $\frac{3}{5}$; –1; 3) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 4) 4; 0; 5) $\frac{4}{5}$; –1. **423.** $15 = 10 + 5$. **424.** $20 = 10 + 10$. **425.** –1. **426.** 1250 см^2. **427.** См. рисунок. **428.** 2) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^3} + C$; 3) $\mathrm{tg}\, 2x - \mathrm{ctg}\, 3x + C$; 4) $2x + 4\ln(1 - x) + C$; 5) $\frac{1}{5}e^{5x} + \frac{7}{4}e^{-4x} + C$; 6) $\sqrt{2x+1} - 4\sin\frac{x}{4} + C$. **429.** 1) $F(x) = x^2 + 4x - 11$; 2) $F(x) = x^4 - x^2 + 3x + 5$; 3) $F(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos 5x$; 4) $F(x) = -\sqrt{1 - 2x} + 4$; 5) $F(x) = 2x^3 + 4e^{\frac{x}{4}} - 16$; 6) $F(x) = \frac{(5x-3)^5 - 7}{25}$. **430.** $s(t) = \frac{t^3}{3} + 1$. **431.** $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$. **432.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$; 4) 18; 5) $4\ln 3 - 4$; 6) 2; 7) 20; 8) $\frac{e^2 - 1}{e^4}$; 9) $\frac{1}{4}\ln 21$. **433.** 1) 6; 2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 3) $\ln 3$; 4) $e^2 - 3$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) 1,5; 7) 4,5; 8) $\frac{32}{3}$; 9) $\frac{8}{3}$; 10) $7 - 5\ln 2$. **434.** 1) 6π; 2) 1.

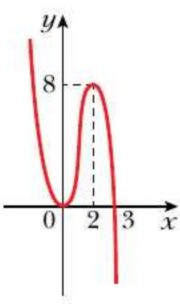
Рисунок к упражнению 427



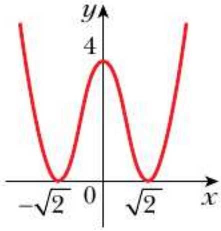
1)



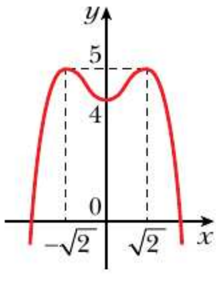
2)



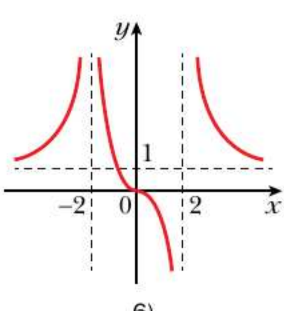
3)



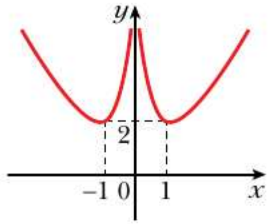
4)



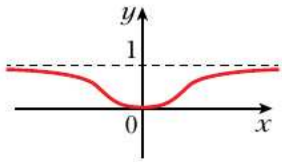
5)



6)



7)



8)

Ответы и указания к упражнениям из рубрики «Когда сделаны уроки»

Примеры решения более сложных логарифмических уравнений и неравенств

1. -2; 2. *Указание*. Числа $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ являются взаимно обратными. **2.** 1) 1; 2) 2. **3.** $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$. **4.** $[0; 2]$. **5.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$. **6.** $[3; +\infty) \cup \{-2\}$. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** 1) -1; 2) $\frac{1}{4}$; 2. *Указание*. Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$. **9.** 3; $\sqrt{2}$. **10.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in (\boldsymbol{Z} \setminus \boldsymbol{N}) \cup \{1\}$. **11.** 1) $(4,5; 5)$; 2) $(0; 2)$. **12.** $(3; 4] \cup \{5\}$.

Оглавление

Глава 4. Элементы теории вероятностей

Таблица производных некоторых функций

Функция f	Производная f'
k (некоторое число)	0
x	1
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Правила дифференцирования

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$
$$(kf)' = kf'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

Уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Таблица первообразных некоторых функций

Функция f	Общий вид первообразной функции f
k (постоянная)	$kx + C$
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

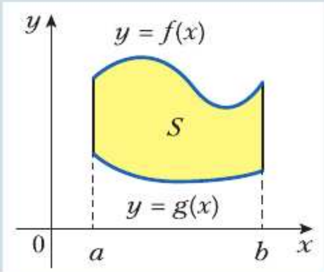
Правила интегрирования

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$
$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$$
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Формула Ньютона — Лейбница

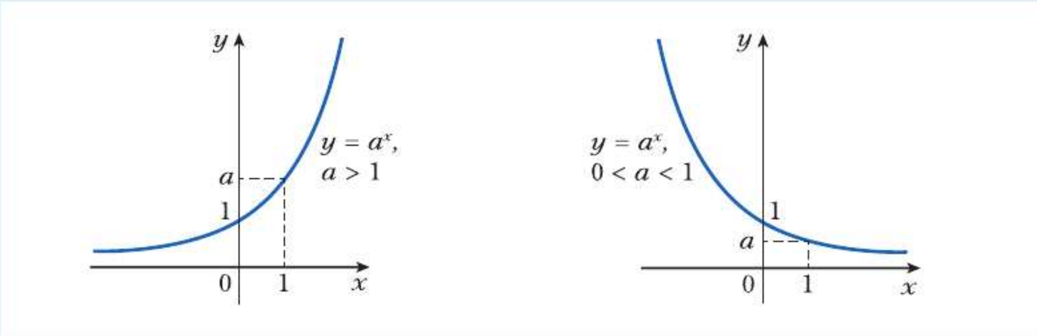
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Вычисление площадей



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

График показательной функции



Свойства степени с действительным показателем

Для $a > 0$, $b > 0$ и любых действительных x и y выполняются равенства:

$$a^x a^y = a^{x+y}$$
$$a^x : a^y = a^{x-y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$
$$(ab)^x = a^x b^x$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Свойства вероятности

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Если A и B — несовместные события, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$$

Если A и B — независимые события, то $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Математическое ожидание

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Схема Бернулли

$$p(x = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$

Свойства логарифмов

Для $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $\beta \in R$ выполняются равенства:

$$a^{\log_a b} = b$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$
$$\log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x,\ \beta \neq 0$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

График логарифмической функции